T.C
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ VE MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖKLİD VE MİNKOWSKİ 3-UZAYINDA N-BİSHOP ÇATISINA GÖRE SLANT HELİSLERİN BAZI KARAKTERİZASYONLARI

Ayhan YILDIZ

AĞUSTOS 2018

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖKLİD VE MİNKOWSKİ 3-UZAYINDA N-BİSHOP ÇATISINA GÖRE SLANT HELİSLERİN BAZI KARAKTERİZASYONLARI

Hazırlayan

Ayhan YILDIZ

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Hatice KUŞAK SAMANCI

Jüri Üyeleri

Dr. Öğr. Üyesi Hatice KUŞAK SAMANCI

Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT

Dr. Öğr. Üyesi Muhsin İNCESU

AĞUSTOS 2018

Ayhan YILDIZ tarafından hazırlanan "**Öklid ve Minkowski 3-Uzayında N-Bishop Çatısına Göre Slant Helislerin Bazı Karakterizasyonları**" adlı tez çalışması 2./8./2018 tarihinde yapılan sınavla aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri **İmza**

Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT
(Başkan)
Dr. Öğr. Üyesi Hatice KUŞAK SAMANCI
(Danışman)
Dr. Öğr. Üyesi Muhsin İNCESU
(Üye)

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 18/05/2018 gün ve 40/22 Sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Koray KÖKSAL
Enstitü Müdürü

SEVGİLİ EŞİM VE BİRİCİK OĞLUM UMUT'A

ÖZET

ÖKLİD VE MİNKOWSKİ 3-UZAYINDA N-BİSHOP ÇATISINA GÖRE SLANT HELİSLERİN BAZI KARAKTERİZASYONLARI

Ayhan YILDIZ

Yüksek Lisans Tezi

Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Hatice KUŞAK SAMANCI
Ağustos 2018, 93 sayfa

Tez beş bölümden oluşmuştur. Giriş bölümünde çalışmamızın tarihsel gelişimi ifade edilmiştir. Önceki çalışmalar bölümünde tarihsel gelişimine göre kaynakların özeti yapılmıştır. Materyal ve yöntem bölümünde Öklid uzayı, Minkowski uzayı, genel helis, slant helis, {N,C,W} alternatif hareketli çatı, Bishop çatı ile ilgili temel tanım ve teoremlerden bahsedilmiştir. Bulgular bölümünde ise çalışmamızın orijinali verilmektedir. Orijinal kısımda öncelikle Öklid uzayında N-Bishop çatısına göre slant helislerin karakterizasyonları araştırıldı. Daha sonra Minkowski uzayında timelike, asli normali ve binormali spacelike olan spacelike eğrinin N-Bishop çatısına göre slant helislerin karakterizasyonları incelendi. Sonuç ve öneriler bölümünde tezin genel değerlendirilmesi yapılmış olup sonraki çalışmalara katkıda bulunmak için öneriler verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Minkowski uzayı, Öklid uzayı, slant helis, N-Bishop çatısı

ABSTRACT

SOME CHARACTERIZATIONS OF THE SLANT HELICES ACCORDING TO N-BISHOP FRAME IN EUCLIDEAN AND MINKOWSKI 3-SPACE

Ayhan YILDIZ

Master Thesis

Bitlis Eren University Institute of Science and Technology
Department of Mathematics
Supervisor: Doctor Teaching Member Hatice KUŞAK SAMANCI
August 2018, 93 pages

The thesis consists of five sections. The historical development of our work in the introduction section is expressed. A summary of the sources according to the historical development in the previous studies has been made. In the material and method section, basic definitions and theorems related to Euclidean space, Minkowski space, general helix, slant helix, {N, C, W} alternative moving frame, Bishop frame are mentioned. In the results section the original of our working is given. In the original part, the characterization of slant helices according to the N-Bishop frame in Euclidean space was investigated. Later in Minkowski space the characterizations of the slant helix according to the N-Bishop frame of the timelike curve, the characterizations of the slant helix according to the N-Bishop frame of the spacelike curve which is the principal normal and binormal spacelike were examined. In the conclusion and suggestions section, a general evaluation of the thesis was made and suggestions were given to contribute to the next studies.

Keyword: Minkowski space, Euclidean space, slant helices, N-Bishop frame

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın hazırlanması sürecinde görüş ve önerileriyle beni yönlendiren bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım, bana her konuda yardımcı ve destek olan Sayın Hocam Dr. Öğr. Üyesi Hatice KUŞAK SAMANCI'ya en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmalarım sırasında bana anlayış gösteren başta sevgili eşim Semra YILDIZ'a ve aileme en içten sevgi saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

¡	Reel sayılar kümesi
¡ ^{n}	n boyutlu Reel sayılar kümesi
E^3	Öklid uzayı
$\langle , \rangle$	İç çarpım
$\times$	Vektörel çarpım
$\lVert . \rVert$	Norm
κ	Eğrilik fonksiyonu
τ	Burulma fonksiyonu
T	Birim teğet vektör alanı
N	Asli normal vektör alanı
B	Binormal vektör alanı
E_1^3	Minkowski 3-uzayı
$\langle , \rangle_L$	Minkowski 3-uzayındaki iç çarpım
$\times_L$	Minkowski 3-uzayındaki vektörel çarpım
$\lVert . \rVert_L$	Norm
D_T	Kovaryant türev

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometrinin çok yaygın bir biçimde kullanılan özel eğrilerinden biri helislerdir. Helisler, farklı bilim dallarında çeşitli kullanımlara ve uygulamalara sahiptir. DNA çifti ve kalojen üçlü helisi, karbon nano tüpleri, helis biçimindeki merdivenler, bir ağaca sarılan sarmaşık gülleri, otomobil ve makine sanayisinin en çok istenen dişli çarkları, bazı keçilerin boynuzları vs. buna benzer birçok örnekler verilebilir. Helis, teğet vektörü sabit bir doğrultuyla sabit açı yapan eğri olarak tanımlanır. Bu tanım 1806 yılında Michel Ange Lancret tarafından yapılmış ve 1845 yılında Barre Saint Venant tarafından ispatlanmıştır. Helisin tanımına benzeyen, yeni bir helis türü olan slant helis; eğrinin asli normal vektör alanı sabit doğrultuyla sabit açı yapan eğri olarak tanımlanır. Bu tanım ise 2004 yılında Izumiya ve Takeuchi [3] tarafından ilk defa yapılmıştır. Eğrinin alternatif hareketli çatısı {N,C,W} olup bu çatı 1995 yılında Scofield [2] tarafından oluşturulmuştur. 2016 yılında Uzunoğlu vd. [18] tarafından eğrinin {N,C,W} alternatif hareketli çatısına farklı bir yaklaşım getirmiş olup C-slant helisi tanımlamıştır. 2017 yılında Keskin ve Yaylı [20] tarafından bir uzay eğrisinin küresel göstergelerini yeni bir alternatif çatı olarak tanımladıkları N-Bishop çatısına göre incelemişlerdir.

Bu tezde yukarıda bahsedilen çalışmalar detaylı olarak incelenmiş olup önce Öklid uzayında N-Bishop çatısına göre slant helislerin bazı karakterizasyonları araştırıldı. Daha sonra Minkowski uzayında timelike eğrilerinin, asli normali ve binormali spacelike olan spacelike eğrilerinin N-Bishop çatısına göre slant helislerinin bazı karakterizasyonları incelendi.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Öklid uzayında bir eğri boyunca alternatif hareketli bir çatı olan Bishop çatısı ilk defa 1975 yılında Bishop [1] tarafından tanımlanmıştır. 1995 yılında Scofield [2] sabit devinim eğrilerini tanımlamış ve eğrilerin alternatif hareketli çatısı {N,C,W} olan bu yeni çatıyı oluşturmuştur. Yeni özel bir eğri olan slant helisler ilk defa 2004 yılında Izumiya ve Takeuchi [3] tarafından tanımlanmıştır. Minkowski uzayında asli normali spacelike olan spacelike eğrinin Bishop çatısı, timelike eğrinin Bishop çatısına göre slant helisleri, uzay eğrisinin Bishop Darboux dönme ekseni ve özel Bishop hareketi 2008 yılında Bükçü ve Karacan [4,5,6] tarafından incelenmiştir. Minkowski uzayında timelike eğrilerin Bishop çatısı 2008 yılında Karacan [7] tarafından oluşturulmuştur. Üç boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre slant helisler Bükçü ve Karacan [8] tarafından 2009 yılında incelenmiştir. Minkowski uzayında binormali spacelike olan spacelike eğrilerin Bishop çatısı Bükçü ve Karacan [9] tarafından 2010 yılında ele alınmıştır. Alternatif paralel çatı olan Bishop çatısının yeni bir versiyonu olarak geliştirilen type-2 Bishop çatısını tanımlayarak küresel göstergeler için yeni bir uygulama Yılmaz ve Turgut [10] tarafından 2010 yılında gerçekleştirilmiştir. Type-2 Bishop çatısı kullanılarak yeni küresel göstergeler ve karakterizasyonlar 2010 yılında Yılmaz vd. [11] tarafından yapılmıştır. Öklid uzayında type-2 Bishop çatısına göre slant helisleri tanımlamış ve slant helislerin karakterizasyonları 2013 yılında Kızıltug vd. [12] tarafından verilmiştir. Minkowski uzayında Bishop Darboux vektörüne göre slant helisler 2013 yılında Kocayiğit vd. [13] tarafından incelenmiştir. Minkowski uzayında spacelike eğrinin Bishop çatısına göre slant helislerinin karakterizasyonları 2013 yılında Bükcü ve Karacan [14] tarafından çalışılmıştır. Minkowski uzayında eğriler ve yüzeylerin diferansiyel geometrisi 2014 yılında Lopez [15] tarafından incelenmiştir. Minkowski uzayında type-2 Bishop çatısına göre spacelike eğrileri 2015 yılında Yılmaz ve Ünlütürk [16] tarafından irdelenmiştir. Minkowski uzayında spacelike eğrilerin type-2 Bishop çatısına göre küresel göstergeleri 2015 yılında Yılmaz [17] tarafından verilmiştir. 2016 yılında Uzunoğlu vd. [18] tarafından sabit devinim eğrilerine ve {N,C,W} alternatif hareketli çatısına farklı bir yaklaşım getirmiş olup C-slant helisi tanımlamıştır. Öklid uzayında Bishop çatısına göre uzay eğrilerinin bazı karakterizasyonları 2016 yılında Kocayigit vd. [19] tarafından irdelenmiştir. Yönlü eğriler için N-Bishop çatısına göre küresel göstergelerinin bir uygulaması 2017 yılında Keskin ve Yaylı [20] tarafından verilmiştir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde Öklid ve Minkowski uzayının iççarpımının özelliklerine bağlı olarak tanımlanan eğrilerin temel kavramları verilmiştir. Özel eğri çeşitlerinden genel ve slant helis eğrileri için Öklid ve Minkowski uzayındaki bazı karakterizasyonlar verilmiştir. Ayrıca $\{N,C,W\}$ alternatif hareketli çatısının, Bishop ve Type-2 Bishop çatılarının Öklid ve Minkowski uzayındaki matris formları verilmiştir.

3.1. Üç Boyutlu Öklid Uzayı

Tanım 3.1.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $\xi : I \to E^3$ dönüşümü diferansiyellenebilir olduğunda ξ ya E^3 de bir eğri denir [27].

Tanım 3.1.2. E^n de C eğrisi (I,ξ) ve (J,ζ) koordinat fonksiyonları ile tanımlanmış olsun.

$$\eta = \xi^{-1} o \zeta : J \to I$$
$$s \to \eta(s) = t$$

ile tanımlı diferansiyellenebilir η fonksiyonuna parametre değişim fonksiyonu denir [5].

Tanım 3.1.3. $\xi : I \to E^n$ dönüşümü için $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t), ..., \xi_n(t))$ eğrisi verilsin. $\xi(t)$ eğrinin birinci mertebeden türevi

$$\xi'(t) = \left(\frac{d\xi_1(t)}{dt}, \frac{d\xi_2(t)}{dt}, \frac{d\xi_3(t)}{dt}, ..., \frac{d\xi_n(t)}{dt} \right)$$

olmak üzere; $(\xi(t), \xi'(t))$ ikilisine ξ eğrisinin $\xi(t)$ noktasındaki tanjant vektörü ve $\xi'(t)$ ye hız vektörü denir [25].

Tanım 3.1.4. $\xi : I \to E^n$ dönüşümü için $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t), ..., \xi_n(t))$ eğrisi parametrik olarak tanımlansın. Teğet vektörü ve teğetinin normu

$$\xi'(t) = \left(\frac{d\xi_1(t)}{dt}, \frac{d\xi_2(t)}{dt}, \frac{d\xi_3(t)}{dt}, ..., \frac{d\xi_n(t)}{dt} \right) \quad \text{ve} \quad \|\xi'(t)\| = \left\| \frac{d\xi(t)}{dt} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d\xi_i}{dt} \right)^2}$$

olmak üzere; $\xi' : I \to \mathbb{R}^n$ dönüşümünde

$$\left\| \xi'(t) \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d\xi_i}{dt} \right)^2} \in \mathbb{R}$$

ile tanımlı fonksiyona skaler hız fonksiyonu denir. $t = t_0$ noktası için

$$\left\| \xi'(t_0) \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d\xi_i(t_0)}{dt} \right)^2} \in \mathbb{R}$$

reel sayısına da skaler hız denir [25].

Tanım 3.1.5. $\xi : I \to E^n$ için $\xi(t) = \left(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t), ..., \xi_n(t)\right)$ eğrisi verilmiş olsun. $t_1, t_2 \in I$ olmak üzere,

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \left\| \xi'(t) \right\| dt$$

reel sayısına ξ eğrisinin $\xi(t_1)$ ve $\xi(t_2)$ noktalar arasındaki yay uzunluğu denir [25].

Tanım 3.1.6. $\xi : I \to E^n$ dönüşümü için $\xi(t) = \left(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t), ..., \xi_n(t)\right)$ eğrisi verilsin. Eğer, $\xi(t)$ eğrisinin teğet vektörünün normu

$$\left\| \xi'(t) \right\| = \left\| \frac{d\xi(t)}{dt} \right\| = 1$$

ise eğriye birim hızlı eğri, s parametresine de yay parametresi denir [25].

Tanım 3.1.7. ξ eğrisi $t_0 \in I$ için $\xi'(t_0) \neq 0$ ise ξ eğrisine $t_0 \in I$ da regülerdir denir ve $\forall t \in I$ için bu şart sağlanıyorsa ξ eğrisine regülerdir denir [15].

Tanım 3.1.8. $\mathbb{R}$, reel sayılar cismini göstermek üzere,

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \left(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n\right) \mid \mu_i \in \mathbb{R}, \; i = 1, 2, ..., n \right\}$$

eşitliği ile belirli $\mathbb{R}^n$ kümesinde toplama işlemi,

$$\left(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n\right) + \left(\varsigma_1, \varsigma_2, ..., \varsigma_n\right) = \left(\mu_1 + \varsigma_1, \mu_2 + \varsigma_2, ..., \mu_n + \varsigma_n\right)$$

eşitliğiyle tamamlanır. Skalerle çarpma işlemi,

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ ve } (\mu_1,\mu_2,...,\mu_n) \in \mathbb{R}^n \text{ için } \lambda(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n) = (\lambda\mu_1,\lambda\mu_2,...,\lambda\mu_n)$$

ile tanımlanır. Bu işlemlere göre $\mathbb{R}^n$ kümesi $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

$\mathbb{R}^n$ vektör uzayında,

$$\mu = (\mu_1,\mu_2,...,\mu_n) \text{ ve } \varsigma = (\varsigma_1,\varsigma_2,...,\varsigma_n)$$

olmak üzere,

$$\langle \mu,\varsigma \rangle = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \varsigma_i$$

eşitliğiyle tanımlanan $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ için $(\mu,\varsigma) \to \langle \mu,\varsigma \rangle$ fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ uzayında bir Öklid iç çarpımdır. Bu iç çarpıma, $\mathbb{R}^n$ uzayının doğal iç çarpımı denir.

$$\|\mu\| = \sqrt{\langle \mu,\mu \rangle}$$

şeklinde tanımlanan $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mu \to \|\mu\|$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir normdur. Buna göre $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı, normlu vektör uzayıdır.

$$d(\mu,\varsigma) = \|\mu - \varsigma\|$$

biçiminde tanımlanan $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir metriktir. Bu metrikle birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına Öklid uzayı denir [28].

Tanım 3.1.9. E^3 uzayında birim hızlı $\xi : \mathrm{I} \to E^3$ eğrisi için $T(s) = \xi'(s)$ eşitliğiyle belirli $T(s)$ vektörüne ξ eğrisinin $\xi(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir [25].

Tanım 3.1.10. E^3 uzayında birim hızlı $\xi : \mathrm{I} \to E^3$ eğrisi için,

$$\kappa : \mathrm{I} \to \mathbb{R} \ , \ \kappa(s) = \|T'(s)\|$$

olmak üzere κ fonksiyonuna ξ eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ sayısına ise ξ eğrisinin $\xi(s)$ noktasındaki eğriliği denir [25].

Tanım 3.1.11. E^3 uzayında birim hızlı $\xi : \mathrm{I} \to E^3$ eğrisi için

$$\vec{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \vec{T}'(s)$$

eşitliğiyle belirli $\vec{N}(s)$ vektörüne, ξ eğrisinin $\xi(s)$ noktasındaki birinci dik vektör alanı(asli normali) denir. $\vec{N}$ vektör alanına, ξ eğrisinin birinci dik vektör alanı(asli normal vektör alanı) denir [25].

Tanım 3.1.12. E^3 uzayında birim hızlı $\xi : \mathrm{I} \to E^3$ eğrisi için

$$\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s)$$

ile tanımlı $\vec{B}(s)$ vektörüne, ξ eğrisinin $\xi(s)$ noktasındaki ikinci dik vektörü(binormali) denir. $\vec{B}$ vektör alanına ξ eğrisinin ikinci dik vektör alanı(binormal vektör alanı) denir [25].

Tanım 3.1.13. E^3 uzayında birim hızlı $\xi : \mathrm{I} \to E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ olmak üzere $\tau : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, $\tau(s) = -\langle \vec{B}'(s), \vec{N}(s) \rangle$ τ fonksiyonuna ξ eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına ise eğrinin $\xi(s)$ noktasındaki burulması denir [25].

Teorem 3.1.14. E^3 uzayında birim hızlı $\xi : \mathrm{I} \to E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ olmak üzere Frenet türev formulleri

$$\begin{aligned}
\vec{T}' &= \kappa \vec{N} \\
\vec{N}' &= -\kappa \vec{T} + \tau \vec{B} \\
\vec{B}' &= -\tau \vec{N}
\end{aligned}$$

dir [28].

Teorem 3.1.15. ξ birim hızlı olmayan bir eğri ve $\xi : \mathrm{I} \to E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ olmak üzere,

$$\vec{T} = \frac{\xi'}{\|\xi'\|}$$
$$\vec{B} = \frac{\xi' \times \xi''}{\|\xi' \times \xi''\|^2}$$
$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$$

dir [28].

$\xi : \mathrm{I} \to E^3$ eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonları κ, τ olmak üzere,

$$\kappa = \frac{\|\xi' \times \xi''\|}{\|\xi'\|^3}$$
$$\tau = \frac{\langle \xi' \times \xi'', \xi''' \rangle}{\|\xi' \times \xi''\|^2}$$

dir [28].

Teorem 3.1.16. ξ birim hızlı olmayan bir eğri, $\xi : \mathrm{I} \to E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ ve bu eğrinin eğrilik ve burulması κ, τ olsun. $\|\xi'\| = \omega$ olmak üzere türev formulleri

$$\vec{T}' = \omega\kappa\vec{N}$$
$$\vec{N}' = \omega\left(-\kappa\vec{T} + \tau\vec{B}\right)$$
$$\vec{B}' = \omega\left(-\tau\vec{N}\right)$$

dir [28].

3.2. Üç Boyutlu Minkowski Uzayı

Tanım 3.2.1. V bir reel vektör uzayı olsun. $\forall m, n \in \mathbb{R}$ ve $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ için

$$\langle , \rangle_L : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü,

i. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle_L$

ii. $\langle m\vec{x} + n\vec{y}, \vec{z} \rangle_L = m\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle_L + n\langle \vec{y}, \vec{z} \rangle_L$

iii. $\langle \vec{x}, m\vec{y}+n\vec{z}\rangle_L = m\langle \vec{x},\vec{y}\rangle_L + n\langle \vec{x},\vec{z}\rangle_L$

özelliklerine sahipse bu dönüşüme vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer formdur denir [24].

Tanım 3.2.2. V bir reel vektör uzayı ve $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ bir simetrik bilineer form olsun.

$$\langle , \rangle |_W : W \times W \to \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formunun indeksi denir [24].

Tanım 3.2.3. $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı üzerinde

$$\langle , \rangle_L : \mathbb{R}^n \times_L \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ , \ \langle a,b\rangle_L = \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i - a_n b_n$$

Öklid iç çarpımı yerine indeksi 1 olan Lorentz iç çarpımı tanımlanırsa $\mathbb{R}^n$ uzayına Lorentz vektör uzayı denir ve $\mathbb{R}^n_1$ ile gösterilir. Özel olarak $n=3$ için bu uzay Minkowski 3-uzayı olarak isimlendirilir ve genellikle E^3_1 ile gösterilir [24].

Tanım 3.2.4. $\vec{a}$**,** $\mathbb{R}^n_1$de bir vektör olmak üzere $\vec{a}$ vektörüne;

i) $\langle \vec{a},\vec{a}\rangle > 0$ veya $\vec{a}=0$ ise spacelike,

ii) $\langle \vec{a},\vec{a}\rangle < 0$ ise timelike,

iii) $\vec{a}\neq 0$ olmak üzere $\langle \vec{a},\vec{a}\rangle = 0$ ise lightlike veya null vektör denir.

Timelike ve null vektörlere causal vektörler denir. $\vec{a}$ vektörünün tipi onun causal karakteri olarak adlandırılır [24].

Tanım 3.2.5. $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ ve $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)$ E^3_1de iki vektör olsun. Lorentz vektörel çarpım,

$$\vec{x}\times_L \vec{y} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_2y_1 - x_1y_2)$$

ile tanımlanır ve burada $\vec{e}_1=(1,0,0)$ $\vec{e}_2=(0,1,0)$ $\vec{e}_3=(0,0,1)$ dir [27].

Tanım 3.2.6. ξ**,** E_1^3 de bir eğri ve I da parametre aralığı olsun. $t \in I$ için $\xi'(t)$ hız vektörü spacelike(veya timelike veya lightlike) vektör ise ξ eğrisine spacelike(veya timelike veya lightlike) denir [24].

Tanım 3.2.7.(Timelike Eğri)

ξ eğrisi bir timelike eğri olsun. Bu durumda $\vec{T}'(s) \neq 0$ vektörü, $\vec{T}(s)$ ile lineer bağımsız bir spacelike vektördür. Bir ξ timelike eğrisinin s noktasındaki eğriliği

$$\kappa(s) = \left\| \vec{T}'(s) \right\|_L$$

denklemi ile hesaplanır. Timelike eğrisinin $\vec{N}(s)$ birim asli normal vektörü de

$$\vec{N}(s) = \frac{\vec{T}'(s)}{\kappa(s)} = \frac{\xi''(s)}{\left\| \xi''(s) \right\|_L}$$

ile bulunur. Ayrıca $\kappa(s)$ eğriliği

$$\kappa(s) = \langle \vec{T}'(s), \vec{N}(s) \rangle_L$$

eşitliğinden de hesaplanabilir. Eğrinin $\vec{B}(s)$ binormal vektörü

$$B(s) = \vec{T}(s) \times_L \vec{N}(s)$$

vektörel çarpımı ile ifade edilir. $\vec{B}(s)$ vektörü bir spacelike birim vektördür. Her s için ξ nın Frenet üç ayaklısı diye adlandırılan $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ E_1^3 ün bir ortonormal bazıdır. ξ eğrisinin s deki burulması

$$\tau(s) = \langle \vec{N}'(s), \vec{B}(s) \rangle_L$$

iç çarpımı ile tanımlanır. Bu durum için Frenet çatısının türev formüllerinin matris formu

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}' \\ \vec{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix}$$

ile gösterilebilir [15].

Tanım 3.2.8.(Spacelike Eğri)

ξ bir spacelike eğri olsun**.** $\vec{T}'(s)$ nin causal karakterine bağlı olarak üç durum vardır:

i) $\vec{T}'(s)$ vektörü spacelike olsun. s noktasında ξ eğrisinin eğriliği

$$\kappa(s)=\left\|\vec{T}'(s)\right\|_L$$

ile tanımlanır. $\vec{N}(s)$ asli normal vektörü

$$\vec{N}(s)=\frac{\vec{T}'(s)}{\kappa(s)}$$

eşitliği ile gösterilir. $\vec{B}(s)$ binormal vektörü

$$\vec{B}(s)=\vec{T}(s)\times_L \vec{N}(s)$$

eşitliğiyle hesaplanır. Bu durumda Frenet türev denklemleri

$$\begin{bmatrix}\vec{T}'\\ \vec{N}'\\ \vec{B}'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & \tau & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{T}\\ \vec{N}\\ \vec{B}\end{bmatrix}$$

matris formu ile gösterilir. ξ eğrinin burulması

$$\tau(s)=-\langle \vec{N}'(s),\vec{B}(s)\rangle_L$$

ile hesaplanır [15].

ii) $T'(s)$ vektörü timelike olsun. ξ nın eğriliği,

$$\kappa(s)=\sqrt{-\langle \vec{T}'(s),\vec{T}'(s)\rangle_L}$$

ile tanımlanır. $N(s)$ asli normal vektörü,

$$\vec{N}(s)=\frac{\vec{T}'(s)}{\kappa(s)}$$

ile hesaplanır. $B(s)$ binormal vektörü

$$\vec{B}(s)=\vec{T}(s)\times_L \vec{N}(s)$$

olup bir spacelike vektördür. Bu durumda Frenet türev formüllerinin matris formu

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}' \\ \vec{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix}$$

ile yazılır. ξ eğrinin burulması,

$$\tau(s) = \langle \vec{N}'(s), \vec{B}(s) \rangle_L$$

ile hesaplanır [15].

iii) $\vec{T}'(s)$ vektörü lightlike ($\vec{T}'(s) \neq 0$ ve $\vec{T}(s)$ orantılı değil) olsun. $\vec{T}(s)$ ile lineer bagımsız olan $\vec{N}(s)$ asli normal vektörü,

$$\vec{N}(s) = \vec{T}'(s)$$

eşitliği ile hesaplanır. $\vec{B}(s)$ lightlike birim vektörü olsun. Bu durumda,

$$\langle \vec{N}(s), \vec{B}(s) \rangle_L = 1$$

eşitliği yazılabilir. $\vec{B}(s)$ vektörü $\vec{T}(s)$ vektörüne ortogonaldir. $\vec{B}(s)$ vektörü ξ eğrinin s deki binormal vektörüdür. Frenet türev denklemlerin matris formu,

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}' \\ \vec{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ -1 & 0 & -\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix}$$

eşitliği ile yazılır. $\tau(s)$ fonksiyonuna ξ eğrinin burulması denir [15].

3.3. Genel Helis

Tanım 3.3.1. $C \subset \mathbb{R}^3$ eğrisi (I,ξ) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall s \in \mathrm{I}$ için $\xi'(s)$ hız vektörü, $\vec{v}$ sabit vektörü ile sabit açı teşkil ediyorsa C eğrisine bir helis denir ve $S_P\{\vec{v}\}$ ya da $\vec{v}$ vektörüne helisin ekseni denir [25].

Tanım 3.3.2. $\xi : \mathrm{I} \to E^3$ bir regüler eğri olsun. ξ eğrisinin $\vec{T}(s)$ birim vektörü ile $\vec{u}$ sabit birim vektörü arasındaki yaptığı φ sabit açı varsa ξ eğrisine helis denir; yani,

$$\forall s \in \mathrm{I} \ \text{ için } \langle \vec{T}(s), \vec{u} \rangle = \cos\varphi$$

eşitliği ile yazılır [25].

Teorem 3.3.1. $C \subset \mathbb{R}^3$ eğrisi (I,ξ) koordinat komşuluğu ile verilsin. C genel helis olması için gerek ve yeter şart $\forall s \in \mathrm{I}$ için $\dfrac{\tau}{\kappa}$ oranı sabittir [25].

Teorem 3.3.2. $\xi : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin binormali $\vec{B}$ olmak üzere ξ eğrisinin bir genel helis olması için gerek ve yeter şart

$$\det\left(\frac{d\vec{B}}{ds}, \frac{d^2\vec{B}}{ds^2}, \frac{d^3\vec{B}}{ds^3} \right) = 0$$

determinantının sağlanmasıdır [25].

Teorem 3.3.3. $\xi = \xi(s)$ eğrisinin bir genel helis olması için gerek ve yeter şart

$$\det\left(\frac{d^2\xi}{ds^2}, \frac{d^3\xi}{ds^3}, \frac{d^4\xi}{ds^4} \right) = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır [25].

3.4. Slant Helis

Tanım 3.4.1. $\xi : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^3$, $\left\|\xi'(s)\right\| = 1$ olacak şekilde birim hızlı bir eğri olsun. Eğer $\kappa(s) \neq 0$ olacak şekilde $\left(\dfrac{\tau}{\kappa}\right)'(s)$ sabit bir fonksiyon ise ξ eğrisine konikal geodezik eğri denir. Burada $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ ξ eğrinin sırasıyla eğrilik ve burulmasıdır [3].

Tanım 3.4.2. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı eğri $\xi : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^3$, $\left\|\xi'(s)\right\| = 1$ olsun. Eğer $\kappa(s) \neq 0$ olacak şekilde ξ eğrinin asli normal doğruları sabit $\vec{v}$ doğrultusu ile sabit bir açı yapıyor ise yani;

$$\forall s \in \mathrm{I} \text{ için } \langle \vec{N}(s), \vec{v} \rangle = \cos\varphi$$

ise ξ bir slant helistir [3].

Teorem 3.4.1. ξ eğrisi $\kappa(s) \neq 0$ olacak şekilde birim hızlı bir uzay eğrisi olsun. Bu durumda ξ eğrisi bir slant helis olması için gerek ve yeter şart ξ eğrisinin asli normal gösteriminin küresel geodezik eğriliği olan

$$\sigma(s) = \left[\frac{\kappa^2}{\left(\kappa^2 + \tau^2\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \right](s)$$

fonksiyonun sabit olmasıdır [3].

3.5. {N,C,W} Alternatif Hareketli Çatı ile İlgili Temel Kavramlar

Tanım 3.5.1. E^3 de ξ eğrisi boyunca alternatif hareketli çatı $\{\vec{N},\vec{C},\vec{N}\wedge\vec{C}=\vec{W}\}$ ile ifade edilir. Sırasıyla birim asal normal vektör, asal birim normal vektörün türevi ve Darboux vektörü

$$\vec{N}\ ,\ \ C=\frac{\vec{N}'}{\|\vec{N}'\|}\quad \text{ve}\quad \vec{W}=\frac{\tau\vec{T}+\kappa\vec{B}}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}$$

eşitlikleri ile tanımlansın. Alternatif hareketli çatının türev denklemleri

$$\begin{bmatrix}\vec{N}'\\ \vec{C}'\\ \vec{W}'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & f(s) & 1\\ -f(s) & 0 & g(s)\\ 0 & -g(s) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{N}\\ \vec{C}\\ \vec{W}\end{bmatrix},$$

matris formu ile yazılır. ξ eğrisinin alternatif hareketli çatıya göre eğrilikleri

$$H=\frac{\tau}{\kappa},\quad \sigma=\frac{H'}{\kappa\left(1+H^2\right)^{3/2}}=sbt\qquad \text{olmak üzere}\qquad f=\kappa\sqrt{1+H^2}\quad \text{ve}\quad g=\sigma f$$

eşitlikleri ile hesaplanır [18].

Tanım 3.5.2.(C-Slant Helis) E^3 de birim hızlı eğri $\xi: I\subset\mathbb{R}\to E^3$ ve alternatif hareketli çatı $\{\vec{N},\vec{C},\vec{N}\wedge\vec{C}=\vec{W}\}$ olsun. ξ eğrisi C-Slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\langle\vec{C},\vec{u}\rangle=\cos\varphi\ \ ,\ \ \varphi=sbt\neq\frac{\pi}{2}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır [18].

3.6. Bishop Çatıları

Tanım 3.6.1. (Öklid Uzayında Bishop Çatısı) Bishop [1] tarafından 1975 yılında oluşturulan Bishop çatısı paralel bir alternatif çatıdır. Bu çatı eğrinin ikinci türevi olmadığı durumlarda bile iyi bir şekilde tanımlanabilir. Bishop çatısı eğrinin hareketli bir ortonormal çatısının sadece teğetine paralel olarak eğri boyunca taşınmasını sağlar. $\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ Bishop çatısının türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}_1' \\ \vec{N}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

matris formu ile ifade edilir. Burada k_1 ve k_2 Bishop eğrilikleridir [1].

Frenet çatısı ile Bishop çatısı arasındaki bağıntı

$$\begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \end{bmatrix}$$

matrisi ile verilir. Burada

$$\varphi(s) = \arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right), \qquad \tau(s) = \varphi'(s) \qquad \text{ve} \qquad \kappa(s) = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$$

eşitliklerinin sağlandığı görülmektedir. Ayrıca Bishop eğrilikleri

$$k_1(s) = \kappa\cos\varphi(s) \quad \text{ve} \quad k_2(s) = \kappa\sin\varphi(s)$$

eşitlikleri ile hesaplanır [1].

Tanım 3.6.2. $\xi : \mathrm{I} \to E^3$ regüler bir eğri olsun. $\forall s \in \mathrm{I}$ için $\vec{N}_1(s)$ birim vektörü $\vec{v}$ sabit birim vektörü ile φ sabit açı yapıyorsa; yani, $\langle \vec{N}_1(s), \vec{v} \rangle = \cos\varphi$ eşitliği varsa ξ eğrisine slant helis denir [8].

Teorem 3.6.1. $\xi : \mathrm{I} \rightarrow \mathrm{E}^3$ sıfırdan farklı k_1 ve k_2 eğriliklere sahip birim hızlı eğri olsun. ξ eğrisi slant helis olması için gerek ve yeter şart $\forall s \in \mathrm{I}$ için $\dfrac{k_1}{k_2}$ oranı sabittir [8].

Teorem 3.6.2. $\xi : \mathrm{I} \rightarrow \mathrm{E}^3$ sıfırdan farklı k_1 ve k_2 eğriliklere sahip birim hızlı eğri olsun. ξ eğrisi slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\det\left(\vec{N}_1', \vec{N}_1'', \vec{N}_1'''\right) = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır [8].

Teorem 3.6.3. $\xi : \mathrm{I} \rightarrow \mathrm{E}^3$ sıfırdan farklı k_1 ve k_2 eğriliklere sahip birim hızlı eğri olsun. ξ eğrisi slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\det\left(\vec{N}_2', \vec{N}_2'', \vec{N}_2'''\right) = 0$$

determinantın sağlanmasıdır [8].

Teorem 3.6.4 ξ, bir Rieman manifoldu üzerinde alınan birim hızlı bir eğri olsun. Bir eğrinin slant helis olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$D_T(D_T D_T \vec{N}_1) = -A D_T \vec{N}_1 - 3k_1' D_T \vec{T}\,, \qquad A = \kappa^2 - \frac{k_1''}{k_1}, \qquad k_1^2 + k_2^2 = \kappa^2$$

eşitliklerini sağlar [8].

Tanım 3.6.3.(Timelike Eğrinin Bishop Çatısı) Üç boyutlu Minkowski uzayında alınan bir $\xi : \mathrm{I} \rightarrow \mathrm{E}_1^3$ timelike eğrisinin ortonormal Bishop çatısı $\left\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\right\}$ olsun. Bu durumda eğrinin $\vec{T}$ teğeti timelike, $\vec{N}_1$ ve $\vec{N}_2$ vektörleri de spacelike vektörlerdir. Timelike eğrinin Bishop çatısının türev denklemlerinin matris formu

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}_1' \\ \vec{N}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ k_1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

ve Serret-Frenet çatısı ile Bishop çatısı arasındaki geçiş matrisi

$$\begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \end{bmatrix}$$

ile verilir [7].

Tanım 3.6.4. (Spacelike Eğrinin Bishop Çatısı):

i) Üç boyutlu Minkowski uzayında alınan bir $\xi : I \to E_1^3$ binormali spacelike olan spacelike eğrisinin ortonormal Bishop çatısı $\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ olsun. Bu durumda eğrinin $\vec{N}_1$ timelike, $\vec{T}$ ve $\vec{N}_2$ spacelike vektörlerdir. Binormali spacelike olan spacelike eğrisinin Bishop çatısının türev denklemlerin matris formu

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}_1' \\ \vec{N}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & -k_2 \\ k_1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

ve Serret-Frenet çatısı ile Bishop çatısı arasındaki geçiş matrisi formu

$$\begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ 0 & \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \end{bmatrix}$$

ile verilir [9].

ii) Üç boyutlu Minkowski uzayında alınan bir $\xi : I \to E_1^3$ asli normalli spacelike olan spacelike eğrisinin ortonormal Bishop çatısı $\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ olsun. Bu durumda eğrinin $\vec{T}$ ve $\vec{N}_1$ vektörleri spacelike, $\vec{N}_2$ vektörü timelike vektörlerdir. Asli normalli spacelike olan spacelike eğrisinin Bishop çatısının türev denklemlerinin matris formu

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}_1' \\ \vec{N}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & -k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

ve Serret-Frenet çatısı ile Bishop çatısı arasındaki geçiş matris formu

$$\begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ 0 & \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \end{bmatrix}$$

ile verilir [4].

Tanım 3.6.5. (Öklid Uzayında Type-2 Bishop Çatısı) Yılmaz ve Turgut [10] tarafından 2010 yılında geliştirilen type-2 Bishop çatısı yeni bir alternatif paralel çatı olarak tanımlanmıştır. Type-2 Bishop çatısı Öklid uzayında bir eğrinin ortonormal çatısının sadece binormal vektörüne paralel olarak bir eğri boyunca taşınmasını ifade eder. Bu çatı eğrinin ikinci türevi olmadığı durumlarda alternatif olarak kullanılabilir. ξ eğrisi E^3 de birim hızlı regüler bir eğri olsun. ξ eğrisinin type-2 Bishop çatısı $\{\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{B}\}$ olup türev denklemlerin

$$\begin{bmatrix} \vec{N}_1' \\ \vec{N}_2' \\ \vec{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -k_1 \\ 0 & 0 & -k_2 \\ k_1 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \\ \vec{B} \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

matris formudur. Burada k_1 ve k_2 type-2 Bishop çatısının eğrilikleridir [18].

Frenet çatısı ile type-2 Bishop çatısı arasındaki geçiş matris formu

$$\begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \\ \vec{B} \end{bmatrix}$$

ile yazılır. Type-2 Bishop çatısının eğrilikleri

$$k_1(s) = -\tau\cos\theta(s) \text{ ve } k_2(s) = -\tau\sin\theta(s)$$

eşitlikleri ile hesaplanır. Bu eğriliklerden faydalanarak

$$\varphi' = \kappa = \frac{\left(\dfrac{k_2}{k_1}\right)'}{1+\left(\dfrac{k_2}{k_1}\right)^2} \qquad \text{ve} \qquad \varphi(s) = \int_0^s \kappa(s)ds$$

eşitlikleri yazılabilir [10].

Tanım 3.6.6. $\xi : \mathrm{I} \to E^3$ regüler bir eğri olsun. $\{\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{B}\}$ type-2 Bishop çatısı olmak üzere $\forall s \in \mathrm{I}$ için $\vec{N}_2(s)$ birim vektörü $\vec{v}$ sabit birim vektörü ile φ sabit açı yapıyorsa; yani, $\forall s \in \mathrm{I}$ için $\langle \vec{N}_2(s), \vec{v} \rangle = \cos\varphi$ ifadesi sağlanırsa ξ eğrisine slant helis denir [10].

Teorem 3.6.5. E^3 de $\xi = \xi(s)$ birim hızlı bir eğri olsun. ξ eğrisi slant helis olması için gerek ve yeter şart $\det(\vec{B}', \vec{B}'', \vec{B}''') = 0$ eşitliğinin sağlanmasıdır [12].

Teorem 3.6.6. ξ, bir Öklid manifoldu üzerinde alınan birim hızlı eğri olsun. ξ eğrisi slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$D_T(D_T D_T \vec{N}_1) = D_T \vec{N}_1 \left(\frac{k_1''}{k_1} - k_2^2 - k_1^2 \right) - 3k_1' D_T \vec{B}$$

denkleminin sağlanmasıdır [12].

Tanım 3.6.7. (Öklid Uzayında N-Bishop Çatısı) N-Bishop çatısı Öklid uzayında bir ξ eğrinin ortonormal $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ alternatif çatısının sadece normal vektörüne paralel olarak bir ξ eğri boyunca taşınmasını ifade eder. Bu çatı ξ eğrisinin ikinci türevi olmadığı durumlarda alternatif olarak kullanılabilir. ξ eğrisi E^3 de birim hızlı regüler bir eğri olsun. ξ eğrinin N-Bishop çatısı $\{\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ olup türev denklemlerin

$$\begin{bmatrix} \vec{N}' \\ \vec{N}_1' \\ \vec{N}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{N} \\ \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

matris formudur. ξ eğrinin ortonormal $\{\vec{N},\vec{C},\vec{W}\}$ alternatif çatısının normal vektörüne paralel keyfi bir φ açı ile döndürerek N-Bishop çatısı $\{\vec{N},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ bulunur. Buradaki φ açısı $\vec{N}_1$ ve $\vec{C}$ vektörleri arasındaki bir açıdır. Alternatif çatı $\{\vec{N},\vec{C},\vec{W}\}$ ile N-Bishop çatısı $\{\vec{N},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ arasındaki dönüşüm

$$\begin{bmatrix}\vec{N}\\ \vec{C}\\ \vec{W}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{N}_1\\ \vec{N}_2\\ \vec{N}\end{bmatrix}$$

matris formu ile hesaplanır. Burada

$$k_1=\int\cos\varphi(s)ds \qquad \text{ve} \qquad k_2=\int\sin\varphi(s)ds$$

N-Bishop çatının eğrilikleridir. $\vec{N}_1$ ve $\vec{C}$ vektörleri arasındaki φ açısı

$$\varphi(s)=\int_{s_0}^{s}g(t)\,dt=\arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right)$$

eşitliği ile bulunur [20].

Teorem 3.6.7. $\xi=\xi(s)$ eğrisi regüler bir eğri ve bu eğrinin N-Bishop eğrilikleri $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ olsun. Eğer ξ eğrisi slant helis ise

$$\sigma(s)=\left[\frac{k_1^2\left(\dfrac{k_2}{k_1}\right)'}{\left(k_1^2+k_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right](s)=sbt$$

eşitliği sağlanır [20].

Sonuç 3.6.1 $\sigma(s)=0$ olması için gerek ve yeter şart $\dfrac{k_2}{k_1}$ oranının sabit olmasıdır [20].

Sonuç 3.6.2 $\xi=\xi(s)$ eğrisi regüler bir eğri ve bu eğrinin N-Bishop eğrilikleri $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ olsun. ξ eğrisi bir genel helis olması için gerek ve yeter şart $\frac{k_2}{k_1}$ sabit olmasıdır [20].

Sonuç 3.6.3 $\xi=\xi(s)$ eğrisi bir regüler eğri olsun. Bu eğrinin Frenet çatı eğrilikleri $\{\kappa(s),\tau(s)\}$ ve N-Bishop eğrilikleri $\{k_1(s),k_2(s)\}$ olsun. $\frac{k_2}{k_1}=sbt$ olması için gerek ve yeter şart $\frac{\tau}{\kappa}$ sabittir [20].

Sonuç 3.6.4 $\xi=\xi(s)$ bir regüler eğri ve bu eğrinin N-Bishop eğrilikleri $\{k_1(s),k_2(s)\}$ olsun. $\varphi(s)=sbt$ olması için gerek ve yeter şart $\xi=\xi(s)$ eğrisi helistir [20].

Tanım 3.6.8. (Timelike Eğrinin N-Bishop Çatısı) ξ, E_1^3 de birim hızlı regüler bir timelike eğri olsun. ξ timelike eğri olduğundan eğrinin Frenet çatısı $\{\vec{T},\vec{N},\vec{B}\}$ $\vec{T}$ timelike, $\vec{N}$ ve $\vec{B}$ spacelike vektörlerdir. Bu durumda N-Bishop çatısının $\{\vec{N},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ vektörleri $\vec{N}$ ve $\vec{N}_2$ spacelike, $\vec{N}_1$ timelike vektörlerdir. N-Bishop çatısı Minkowski uzayında bir ξ timelike eğrisinin ortonormal $\{\vec{N},\vec{C},\vec{W}\}$ alternatif çatısının sadece normal vektörüne paralel olarak bir ξ timelike eğri boyunca taşınmasını ifade eder. Bu çatı ξ timelike eğrisinin ikinci türevi olmadığı durumlarda alternatif olarak kullanılabilir. ξ timelike eğrisinin N-Bishop çatısı $\{\vec{N},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ olup türev denklemlerin

$$\begin{bmatrix}\vec{N}'\\ \vec{N}_1'\\ \vec{N}_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & k_1 & -k_2\\ k_1 & 0 & 0\\ k_2 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{N}\\ \vec{N}_1\\ \vec{N}_2\end{bmatrix} \tag{3.7}$$

$$\langle\vec{N},\vec{N}\rangle_L=1,\ \langle\vec{N}_1,\vec{N}_1\rangle_L=-1,\ \langle\vec{N}_2,\vec{N}_2\rangle_L=1$$

matris formudur. ξ timelike eğrisinin ortonormal $\{\vec{N},\vec{C},\vec{W}\}$ alternatif çatısının normal vektörüne paralel keyfi bir φ açı ile döndürerek N-Bishop çatısı $\{\vec{N},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ bulunur. Buradaki

φ açısı $\vec{N}_1$ ve $\vec{C}$ vektörleri arasındaki bir açıdır. Alternatif çatı $\{\vec{N},\vec{C},\vec{W}\}$ ile N-Bishop çatı $\{\vec{N},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ arasındaki dönüşüm

$$\begin{bmatrix} \vec{N} \\ \vec{C} \\ \vec{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cosh\varphi & \sinh\varphi & 0 \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \\ \vec{N} \end{bmatrix}$$

matris formu ile hesaplanır. κ ve τ Frenet çatı eğrilikleri ile k_1 ve k_2 N-Bishop çatının eğrilikleri arasındaki ilişkiyi veren

$$f = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} = \sqrt{\left|k_2^2 - k_1^2\right|}$$

eşitliktir. $\vec{N}_1$ ve $\vec{C}$ vektörleri arasındaki φ açısı

$$\varphi(s) = \int_{s_0}^{s} \left(-g(t)\right) dt = -\tanh^{-1}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)$$

eşitliği ile hesaplanır [21].

Tanım 3.6.9.(Spacelike Eğrinin N-Bishop Çatısı)

i) Minkowski Uzayında Asli Normali Spacelike olan Spacelike Eğrinin N-Bishop Çatısı:

ξ, E_1^3 de birim hızlı regüler bir spacelike eğri olsun. ξ spacelike eğri olduğundan eğrinin Frenet çatısı $\{\vec{T},\vec{N},\vec{B}\}$ $\vec{B}$ timelike, $\vec{N}$ ve $\vec{T}$ spacelike vektörlerdir. Bu durumda N-Bishop çatısının $\{\vec{N},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ vektörleri $\vec{N}$ ve $\vec{N}_1$ spacelike, $\vec{N}_2$ timelike vektörlerdir. N-Bishop çatısı Minkowski uzayında bir ξ spacelike eğrisinin ortonormal $\{\vec{N},\vec{C},\vec{W}\}$ alternatif çatısının sadece normal vektörüne paralel olarak bir ξ spacelike eğri boyunca taşınmasını ifade eder. Bu çatı ξ spacelike eğrisinin ikinci türevi olmadığı durumlarda alternatif olarak kullanılabilir. ξ spacelike eğrisinin N-Bishop çatısı $\{\vec{N},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ olup türev denklemlerin

$$\begin{bmatrix} \vec{N}' \\ \vec{N}_1' \\ \vec{N}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & -k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{N} \\ \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

$$\langle \vec{N}, \vec{N} \rangle_L = 1,\ \langle \vec{N}_1, \vec{N}_1 \rangle_L = 1,\ \langle \vec{N}_2, \vec{N}_2 \rangle_L = -1$$

matris formudur. ξ spacelike eğrisinin ortonormal $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ alternatif çatısının normal vektörüne paralel keyfi bir φ açı ile döndürerek N-Bishop çatısı $\{\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ bulunur. Buradaki φ açısı $\vec{N}_1$ ve $\vec{C}$ vektörleri arasındaki bir açıdır. Alternatif çatı $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ ile N-Bishop çatı $\{\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ arasındaki dönüşüm

$$\begin{bmatrix} \vec{N} \\ \vec{C} \\ \vec{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cosh\varphi & \sinh\varphi & 0 \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \\ \vec{N} \end{bmatrix}$$

matris formu ile hesaplanır. κ ve τ Frenet çatı eğrilikleri ile k_1 ve k_2 N-Bishop çatının eğrilikleri arasındaki ilişkiyi veren

$$f = \sqrt{\left|\kappa^2 - \tau^2\right|} = \sqrt{\left|k_1^2 - k_2^2\right|}$$

eşitliktir. $\vec{N}_1$ ve $\vec{C}$ vektörleri arasındaki φ açısı

$$\varphi(s) = \int_{s_0}^{s} \left(-g(t)\right) dt = -\tanh^{-1}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)$$

eşitliği ile hesaplanır [23].

ii) Minkowski Uzayında Binormali Spacelike olan Spacelike Eğrinin N-Bishop Çatısı:

ξ, E_1^3 de birim hızlı regüler bir spacelike eğri olsun. ξ spacelike eğri olduğundan eğrinin Frenet çatısı $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ $\vec{N}$ timelike, $\vec{B}$ ve $\vec{T}$ spacelike vektörlerdir. Bu durumda N-Bishop çatısının $\{\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ vektörleri $\vec{N}_1$ ve $\vec{N}_2$ spacelike, $\vec{N}$ timelike vektörlerdir. N-Bishop çatısı

Minkowski uzayında bir ξ spacelike eğrisinin ortonormal $\{\vec{N},\vec{C},\vec{W}\}$ alternatif çatısının sadece normal vektörüne paralel olarak bir ξ spacelike eğri boyunca taşınmasını ifade eder. Bu çatı ξ spacelike eğrisinin ikinci türevi olmadığı durumlarda alternatif olarak kullanılabilir. ξ spacelike eğrisinin N-Bishop çatısı $\{\vec{N},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ olup türev denklemlerin

$$\begin{bmatrix} \vec{N}' \\ \vec{N}_1' \\ \vec{N}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ k_1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{N} \\ \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

$$\langle \vec{N},\vec{N}\rangle_L = -1,\ \langle \vec{N}_1,\vec{N}_1\rangle_L = 1,\ \langle \vec{N}_2,\vec{N}_2\rangle_L = 1$$

matris formudur. ξ spacelike eğrisinin ortonormal $\{\vec{N},\vec{C},\vec{W}\}$ alternatif çatısının normal vektörüne paralel keyfi bir φ açı ile döndürerek N-Bishop çatısı $\{\vec{N},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ bulunur. Buradaki φ açısı $\vec{N}_1$ ve $\vec{C}$ vektörleri arasındaki bir açıdır. Alternatif çatı $\{\vec{N},\vec{C},\vec{W}\}$ ile N-Bishop çatı $\{\vec{N},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ arasındaki dönüşüm

$$\begin{bmatrix} \vec{N} \\ \vec{C} \\ \vec{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \\ \vec{N} \end{bmatrix}$$

matris formu ile hesaplanır. κ ve τ Frenet çatı eğrilikleri ile k_1 ve k_2 N-Bishop çatının eğrilikleri arasındaki ilişkiyi veren

$$f = \sqrt{\left|\tau^2 - \kappa^2\right|} = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$$

eşitliktir. $\vec{N}_1$ ve $\vec{C}$ vektörlerin arasındaki φ açısı

$$\varphi(s) = \int_{s_0}^{s} \left(-g(t)\right) dt = -\tan^{-1}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)$$

eşitliği ile hesaplanır [22].

4. BULGULAR

4.1. Öklid Uzayında N-Bishop Çatısına Göre Slant Helislerin Bazı Karakterizasyonları

Tanım 4.1.1. $\xi : \mathrm{I} \to \mathrm{E}^3$ Öklid uzayında birim hızlı bir eğri olsun. ξ eğrisinin N-Bishop çatısına göre slant helis olması için $\vec{N}_1$ birim vektörü ile $\vec{v}$ sabit doğrultu vektörü arasındaki açının sabit olması gerekir; yani,

$$\forall\, s \in I \ \text{ için } \ \langle \vec{N}_1(s), \vec{v} \rangle = \cos\varphi$$

koşulunu sağlayan ξ eğrisine slant helis denir.

Teorem 4.1.1. $\xi : \mathrm{I} \to \mathrm{E}^3$ sıfırdan farklı k_1 ve k_2 N-Bishop çatı eğriliklerine sahip birim hızlı eğridir. ξ eğrisi slant helis olması için gerek ve yeter şart $\forall\, s \in \mathrm{I}$ için $\dfrac{k_1}{k_2} = sbt$ eşitliğini sağlar.

İspat. $(\Rightarrow)$: ξ, E^3 de slant helis olsun. Slant helis tanımından $\left\{ \vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2 \right\}$ N-bishop çatısına göre $\langle \vec{N}_1, \vec{v} \rangle = \cos\varphi\,(\text{sabit})$, φ sabit açı olmak üzere yazılabilir. $\langle \vec{N}_1, \vec{v} \rangle = \cos\varphi$ eşitliğinde türev alınırsa $\langle \vec{N}_1', \vec{v} \rangle = 0$ olup (3.6) denklemlerinden

$$\langle -k_1 \vec{N}, \vec{v} \rangle = 0 \ \text{ olur buradan } \ \langle \vec{N}, \vec{v} \rangle = 0$$

yazılır. Bulduğumuz eşitlikte tekrar türev alınırsa; yani, $\langle \vec{N}, \vec{v} \rangle = 0$ ifadesinin türevi

$$\langle \vec{N}', \vec{v} \rangle = 0$$

bulunur. (3.6) denklemlerinden

$$\langle k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2, \vec{v} \rangle = 0$$

eşiti bulunur. Bu eşitlikten

$$k_1\langle \vec{N}_1,\vec{v}\rangle + k_2\langle \vec{N}_2,\vec{v}\rangle = 0$$
$$k_1(\cos\varphi) + k_2(\sin\varphi) = 0$$
$$\frac{k_1}{k_2} = -\tan\varphi \ (sbt)$$

elde edilir. $\langle \vec{N},\vec{v}\rangle = 0$ eşitliğinden $\vec{v} \in s_p\left\{\vec{N}_1,\vec{N}_2\right\}$ olup burada

$$\vec{v} = (\cos\varphi)\vec{N}_1 + (\sin\varphi)\vec{N}_2 \tag{4.1}$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlikte türev alınırsa

$$\begin{aligned}\vec{v}' &= (\cos\varphi)\vec{N}_1{}' + (\sin\varphi)\vec{N}_2{}' \\ &= (\cos\varphi)(-k_1\vec{N}) + (\sin\varphi)(-k_2\vec{N}) \\ &= -\left[k_1(\cos\varphi) + k_2(\sin\varphi)\right]\vec{N} = \vec{0}\end{aligned}$$

türevi sıfır olan bir ifade bulunur ve $\vec{v}$ sabit olur. Böylece ispatın bir yönü ispatlanmış olur.

$(\Leftarrow)$: $\frac{k_1}{k_2} = sbt$ olduğunu kabul edelim. O halde $\frac{k_1}{k_2} = \lambda$ ve λ sabit sayısına karşılık gelen $\lambda = -\tan\varphi$ eşitliği alınabilir. Bu eşitlikten,

$$\frac{k_1}{k_2} = -\tan\varphi$$
$$k_1(\cos\varphi) + k_2(\sin\varphi) = 0$$

denklemi bulunur. (4.1) eşitliğinde türev alınırsa

$$\begin{aligned}\vec{v}' &= (\cos\varphi)\vec{N}_1' + (\sin\varphi)\vec{N}_2' \\ &= (\cos\varphi)(-k_1\vec{N}) + (\sin\varphi)(-k_2\vec{N}) \\ &= -\left[k_1(\cos\varphi) + k_2(\sin\varphi)\right]\vec{N} = \vec{0}\end{aligned}$$

türevi sıfır olan bir ifade bulunur ve $\vec{v}$ sabit olur. Şimdi $\langle \vec{N}_1,\vec{v}\rangle$ ifadesinin sabit olduğunu gösterelim.

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{N}_1, \vec{v} \rangle &= \langle \vec{N}_1, (\cos\varphi)\vec{N}_1 + (\sin\varphi)\vec{N}_2 \rangle \\
&= (\cos\varphi)\langle \vec{N}_1, \vec{N}_1 \rangle + (\sin\varphi)\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle \\
&= (\cos\varphi)\underbrace{\langle \vec{N}_1, \vec{N}_1 \rangle}_{1} + (\sin\varphi)\underbrace{\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle}_{0} \\
&= \cos\varphi \, (sbt)
\end{aligned}
$$

denklemi ile ξ eğrisinin slant helis olduğu görülmektedir, böylece teorem ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.2. $\alpha : \mathrm{I} \to \mathrm{E}^3$ sıfırdan farklı k_1 ve k_2 N-Bishop çatı eğriliklerine sahip birim hızlı eğridir. α eğrisi slant helis olması için gerek ve yeter şart $\det\left(\vec{N}_1', \vec{N}_1'', \vec{N}_1'''\right) = 0$ eşitliği sağlanır.

İspat. $(\Rightarrow)$: α slant helis olsun. Bu durumda $\dfrac{k_1}{k_2}$ sabittir. (3.6) denklemlerinden $\vec{N}_1' = -k_1\vec{N}$ denkleminin türevi alınıp (3.6) denklemleri yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\vec{N}_1'' &= -k_1'\vec{N} - k_1\vec{N}' \\
&= -k_1'\vec{N} - k_1(k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2) \\
&= -k_1'\vec{N} - k_1^2\vec{N}_1 - k_1k_2\vec{N}_2
\end{aligned}
$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikte tekrar türev alınıp (3.6) denklemlerinden faydalanarak gerekli düzenlemeler yapılır; yani,

$$
\begin{aligned}
\vec{N}_1''' &= -2k_1k_1'\vec{N}_1 - k_1^2\vec{N}_1' - k_1''\vec{N} - k_1'\vec{N}' - k_1'k_2\vec{N}_2 - k_2'k_1\vec{N}_2 - k_1k_2\vec{N}_2' \\
&= -2k_1k_1'\vec{N}_1 - k_1^2(-k_1\vec{N}) - k_1''\vec{N} - k_1'(k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2) - k_1'k_2\vec{N}_2 - k_2'k_1\vec{N}_2 - k_1k_2(-k_2\vec{N}) \\
&= (k_1^3 - k_1'' + k_1k_2^2)\vec{N} + (-3k_1k_1')\vec{N}_1 + (-2k_1'k_2 - k_2'k_1)\vec{N}_2
\end{aligned}
$$

ifadesi bulunur. Şimdi bulduğumuz denklemleri $\det\left(\vec{N}_1', \vec{N}_1'', \vec{N}_1'''\right)$ determinant ifadesinde sırasıyla yerlerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılır; yani,

$$\det\left(\vec{N}_1', \vec{N}_1'', \vec{N}_1'''\right) = \begin{vmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1' & -k_1^2 & -k_1 k_2 \\ k_1^3 - k_1'' + k_1 k_2^2 & -3k_1 k_1' & -2k_1' k_2 - k_2' k_1 \end{vmatrix}$$

$$= -k_1\left[2k_1^2 k_1' k_2 + k_2' k_1^3 - 3k_1^2 k_2 k_1'\right]$$

$$= k_1\left[k_1^2 k_2 k_1' - k_2' k_1^3\right]$$

$$= k_1^3\left[k_2 k_1' - k_1 k_2'\right]$$

$$= k_1^3 k_2^2 \left[\frac{k_1}{k_2}\right]'$$

eşitliği bulunur. α slant helis olduğundan $\frac{k_1}{k_2}$ sabittir. O halde $\left[\frac{k_1}{k_2}\right]' = 0$ dır. Buradan

$$\det\left(\vec{N}_1', \vec{N}_1'', \vec{N}_1'''\right) = 0$$

determinantı bulunur.

$(\Leftarrow)$: $\det\left(\vec{N}_1', \vec{N}_1'', \vec{N}_1'''\right) = 0$ olduğunu kabul edelim.

$\det\left(\vec{N}_1', \vec{N}_1'', \vec{N}_1'''\right) = k_1^3 k_2^2 \left[\frac{k_1}{k_2}\right]' = 0$ ve buradan $k_1^3 k_2^2 \left[\frac{k_1}{k_2}\right]' = 0$ olup $\left[\frac{k_1}{k_2}\right]' = 0$, $k_2 \neq 0, k_1 \neq 0$

burada türevi sıfır olan $\frac{k_1}{k_2}$ sabittir. O halde α bir slant helistir. İspat tamamlanır.

Teorem 4.1.3. $\alpha : \mathrm{I} \to \mathrm{E}^3$ sıfırdan farklı k_1 ve k_2 N-Bishop çatı eğriliklere sahip birim hızlı eğridir. α eğrisi slant helis olması için gerek ve yeter şart $\det\left(\vec{N}_2', \vec{N}_2'', \vec{N}_2'''\right) = 0$ eşitliği sağlanır.

İspat. $(\Rightarrow)$: α slant helis olsun. Bu durumda $\frac{k_1}{k_2}$ sabittir diyebiliriz. (3.6) denklemlerinden $\vec{N}_2' = -k_2 \vec{N}$ denkleminin türevini alırsak

$$\vec{N}_2'' = -k_2' \vec{N} - k_2 \vec{N}'$$

denklemi bulunur. Bu eşitlikte (3.6) denklemleri yerine yazılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\vec{N}_2'' &= -k_2{}'\vec{N} - k_2\left(k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2\right)\\ &= -k_2{}'\vec{N} - k_1k_2\vec{N}_1 - k_2{}^2\vec{N}_2\end{aligned}$$

ifadesi bulunur. Bu ifadede tekrar türev alınıp (3.6) denklemleri yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\vec{N}_2''' &= -k_1{}'k_2\vec{N}_1 - k_1k_2{}'\vec{N}_1 - k_1k_2\vec{N}_1' - k_2{}''\vec{N} - k_2{}'\vec{N}' - 2k_2k_2{}'\vec{N}_2 - k_2{}^2\vec{N}_2{}'\\ &= -k_1{}'k_2\vec{N}_1 - k_1k_2{}'\vec{N}_1 - k_1k_2(-k_1\vec{N}) - k_2{}''\vec{N} - k_2{}'(k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2) - 2k_2k_2{}'\vec{N}_2 - k_2{}^2(-k_2\vec{N})\\ &= (k_2{}^3 - k_2{}'' + k_2k_1{}^2)\vec{N} + (-2k_1k_2{}' - k_2k_1{}')\vec{N}_1 + (-3k_2k_2{}')\vec{N}_2\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Şimdi $\det\left(\vec{N}_2', \vec{N}_2'', \vec{N}_2'''\right)$ ifadesini hesaplamak için bulduğumuz eşitlikleri determinant ifadesinde yerine yazılarak gerekli hesaplamalar yapılır; yani,

$$\begin{aligned}\det\left(\vec{N}_2', \vec{N}_2'', \vec{N}_2'''\right) &= \begin{vmatrix} -k_2 & 0 & 0\\ -k_2{}' & -k_1k_2 & -k_2{}^2\\ k_2{}^3 - k_2{}'' + k_2k_1{}^2 & -2k_1k_2{}' - k_2k_1{}' & -3k_2k_2{}'\end{vmatrix}\\ &= -k_2(3k_1k_2{}^2k_2' - 2k_1k_2{}^2k_2' - k_2{}^3k_1')\\ &= k_2(k_2{}^3k_1' - k_1k_2{}^2k_2')\\ &= k_2{}^3(k_2k_1' - k_1k_2')\\ &= k_2{}^5\left[\frac{k_1}{k_2}\right]'\end{aligned}$$

determinantın sonucu bulunur. α slant helis olduğundan $\dfrac{k_1}{k_2}$ sabittir. O halde $\left[\dfrac{k_1}{k_2}\right]' = 0$ dır. Buradan,

$$\det\left(\vec{N}_2', \vec{N}_2'', \vec{N}_2'''\right) = 0$$

elde edilir.

$(\Leftarrow)$: $\det\left(\vec{N}_2', \vec{N}_2'', \vec{N}_2'''\right) = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\det\left(\vec{N}_2', \vec{N}_2'', \vec{N}_2'''\right) = k_2^{\,5}\left[\frac{k_1}{k_2}\right]' = 0$$

eşitliğinden

$$k_2^{\,5}\left[\frac{k_1}{k_2}\right]' = 0 \quad , \; k_2 \neq 0$$

elde edilir ki buradan $\left[\frac{k_1}{k_2}\right]' = 0$ olduğu görülür ve $\frac{k_1}{k_2}$ sabit olur. O halde α bir slant helistir. İspat tamamlanır.

Teorem 4.1.4. $\alpha : \mathrm{I} \to \mathrm{E}^3$ sıfırdan farklı k_1 ve k_2 N-Bishop çatı eğriliklerine sahip birim hızlı eğridir. α eğrisi slant helis olması için gerek ve yeter şart $\det\left(\vec{N}', \vec{N}'', \vec{N}'''\right) = 0$ eşitliğini sağlar.

İspat. $(\Rightarrow)$: α slant helis olsun. Bu durumda $\frac{k_1}{k_2}$ sabittir diyebiliriz. (3.6) denklemlerinden $N' = k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2$ denkleminde türev aldıktan sonra (3.6) denklemleri yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılır; yani,

$$\begin{aligned}
N' &= k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2 \\
\vec{N}'' &= k_1'\vec{N}_1 + k_1\vec{N}_1' + k_2'\vec{N}_2 + k_2\vec{N}_2' \\
&= k_1'\vec{N}_1 + k_1(-k_1\vec{N}) + k_2'\vec{N}_2 + k_2(-k_2\vec{N}) \\
&= (-k_1^{\,2} - k_2^{\,2})\vec{N} + k_1'\vec{N}_1 + k_2'\vec{N}_2
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte tekrar türev alınarak (3.6) denklemlerini yerini yazıp gerekli düzenlemeler yapılır; yani,

$$\begin{aligned}
\vec{N}''' &= (-2k_1k_1' - 2k_2k_2')\vec{N} + (-k_1^{\,2} - k_2^{\,2})\vec{N}' + k_1''\vec{N}_1 + k_1'\vec{N}_1' + k_2''\vec{N}_2 + k_2'\vec{N}_2' \\
&= (-2k_1k_1' - 2k_2k_2')\vec{N} + (-k_1^{\,2} - k_2^{\,2})(k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2) + k_1''\vec{N}_1 + k_1'(-k_1\vec{N}) + k_2''\vec{N}_2 + k_2'(-k_2\vec{N}) \\
&= (-3k_1k_1' - 3k_2k_2')\vec{N} + (k_1'' - k_1^{\,3} - k_1k_2^{\,2})\vec{N}_1 + (k_2'' - k_1^{\,2}k_2 - k_2^{\,3})\vec{N}_2
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi $\det\left(\vec{N}', \vec{N}'', \vec{N}'''\right)$ ifadesini hesaplamak için determinant eşitliğinde bulduğumuz eşitlikleri yerine yazıp gerekli hesaplamalar düzenlemeler yapılır; yani,

$$\det\left(\vec{N}', \vec{N}'', \vec{N}'''\right) = \begin{vmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ (-k_1^2 - k_2^2) & k_1' & k_2' \\ (-3k_1k_1' - 3k_2k_2') & (k_1'' - k_1^3 - k_1k_2^2) & (k_2'' - k_1^2k_2 - k_2^3) \end{vmatrix}$$
$$= -k_1\left[(-k_1^2 - k_2^2)(k_2'' - k_1^2k_2 - k_2^3) + 3k_1k_1'k_2' + 3k_2k_2'^2\right]$$
$$+ k_2\left[(-k_1^2 - k_2^2)(k_1'' - k_1^3 - k_1k_2^2) + 3k_1k_1'^2 + 3k_2k_2'k_1'\right]$$
$$= \left(3k_1k_2^2k_1' + 3k_2^3k_2'\right)\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' - \left(k_1^2 + k_2^2\right)\left[k_2k_1'' - k_1k_2''\right]$$
$$= \left(3k_1k_2^2k_1' + 3k_2^3k_2'\right)\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' - \left[\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 + 1\right]\left[\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'' k_2^4 + 2k_2^3k_2'\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right] \tag{4.2}$$

determinantın eşiti bulunur. α slant helis olduğundan $\frac{k_1}{k_2}$ sabittir. Buradan $\left[\frac{k_1}{k_2}\right]' = 0$ olup (4.2) eşitliğinden $\det\left(\vec{N}', \vec{N}'', \vec{N}'''\right) = 0$ olur ki ispatın bir yönü tamamlanır.

$(\Leftarrow)$: $\det\left(\vec{N}', \vec{N}'', \vec{N}'''\right) = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda (4.2) eşitliğinden $\left[\frac{k_1}{k_2}\right]' = 0$ olur ve buradan $\frac{k_1}{k_2}$ sabittir. O halde α slant helis olup ispat tamamlanır.

Üç boyutlu Öklid uzayında alınan bir α eğrisi slant helis olsun. O zaman N-Bishop çatısının $\alpha'(s) = T$ vektörüne göre kovaryant türevi

$$\begin{aligned} D_T\vec{N} &= k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2 \\ D_T\vec{N}_1 &= -k_1\vec{N} \\ D_T\vec{N}_2 &= -k_2\vec{N} \end{aligned} \tag{4.3}$$

eşitlikleriyle yazılır. Herhangi bir $s \in \mathrm{I}$ için, $\vec{N}_1(s)$ ve $\vec{N}_2(s)$ vektör alanlar olup k_1 ve k_2 eğrilikleri s parametreli fonksiyonlardır.

Teorem 4.1.5. Üç boyutlu Öklid uzayında alınan birim hızlı bir α eğrisinin bir slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$D_T(D_T D_T \vec{N}_1) = D_T \vec{N}_1 \left(\frac{k_1''}{k_1} - k_2^2 - k_1^2 \right) - 3k_1' D_T \vec{N} \tag{4.4}$$

eşitliğini sağlar.

İspat. $(\Rightarrow)$: Farz edelim ki α slant helis olsun. (4.4) eşitliğini ispalamak için öncelikle (4.3) denklemlerinden $D_T \vec{N}_1 = -k_1 \vec{N}$ denkleminin kovaryant türevini alıp (4.3) eşitliklerini türevde yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılır; yani,

$$\begin{aligned} D_T(D_T \vec{N}_1) &= D_T(-k_1 \vec{N}) \\ &= -k_1' \vec{N} - k_1 D_T \vec{N} \\ &= -k_1' \vec{N} - k_1(k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2) \\ &= -k_1' \vec{N} - k_1^2 \vec{N}_1 - k_1 k_2 \vec{N}_2 \end{aligned} \tag{4.5}$$

eşitliği bulunur. (4.5) eşitliğin kovaryant türevini aldıktan sonra (4.3) eşitliklerini yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılır; yani,

$$\begin{aligned} D_T(D_T D_T \vec{N}_1) &= D_T(-k_1' \vec{N} - k_1^2 \vec{N}_1 - k_1 k_2 \vec{N}_2) \\ &= -k_1'' \vec{N} - k_1' D_T \vec{N} - 2k_1 k_1' \vec{N}_1 - k_1^2 D_T \vec{N}_1 - (k_1' k_2 + k_1 k_2') \vec{N}_2 - k_1 k_2 D_T \vec{N}_2 \\ &= -k_1'' \vec{N} - k_1' D_T \vec{N} - 2k_1 k_1' \vec{N}_1 - (k_1' k_2 + k_1 k_2') \vec{N}_2 - k_1 k_2(-k_2 \vec{N}) - k_1^2 D_T \vec{N}_1 \end{aligned} \tag{4.6}$$

eşitliği bulunur. α slant helis olduğundan $\frac{k_1}{k_2} = sbt$ yazılır. Bu eşitliğin türevini alırsak

$$\left(\frac{k_1}{k_2} \right)' = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikte bölüm türevini hesaplayıp gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\frac{k_1' k_2 - k_1 k_2'}{k_2^2} = 0$$

$$k_1' k_2 - k_1 k_2' = 0$$

$$k_1' k_2 = k_1 k_2' \tag{4.7}$$

ifadesi bulunur. Ayrıca (4.3) eşitliklerinden faydalanarak

$$N = \frac{-1}{k_1} D_T \vec{N}_1 \tag{4.8}$$

eşitliği yazılabilir. Şimdi ise (4.7) ve (4.8) ifadelerini kullanarak (4.6) eşitliğinde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılır; yani,

$$\begin{aligned} D_T(D_T D_T \vec{N}_1) &= -k_1'' \vec{N} + k_1 k_2^2 \vec{N} - k_1' D_T \vec{N} - 2k_1' \left(\underbrace{k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2}_{D_T N} \right) - k_1^2 D_T \vec{N}_1 \\ &= (-k_1'' + k_1 k_2^2) \vec{N} - k_1^2 D_T \vec{N}_1 - 3k_1' D_T \vec{N} \\ &= (-k_1'' + k_1 k_2^2)(-\frac{1}{k_1} D_T \vec{N}_1) - k_1^2 D_T \vec{N}_1 - 3k_1' D_T \vec{N} \\ &= D_T \vec{N}_1 (\frac{k_1''}{k_1} - k_2^2 - k_1^2) - 3k_1' D_T \vec{N} \end{aligned}$$

(4.4) eşitliği elde edilir ve ispatın bir yönü tamamlanır.

$(\Leftarrow)$: Tersine, (4.4) eşitliğinin doğru olduğunu kabul edelim. Bu durumda α nın slant helis olduğunu göstermeye çalışalım. Bunun için (4.8) eşitliğin kovaryant türevini alırsak

$$\begin{aligned} D_T \vec{N} &= D_T \left(\frac{-1}{k_1} D_T \vec{N}_1 \right) \\ &= \frac{k_1'}{k_1^2} D_T \vec{N}_1 - \frac{1}{k_1} D_T D_T \vec{N}_1 \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikte tekrar kovaryant türev alarak gerekli düzenlemeler yapılır; yani,

$$
\begin{aligned}
D_T D_T \vec{N} &= D_T \left(\frac{k_1'}{k_1^2} D_T \vec{N}_1 - \frac{1}{k_1} D_T D_T \vec{N}_1 \right) \\
&= \left(\frac{k_1'}{k_1^2} \right)' D_T \vec{N}_1 + \frac{k_1'}{k_1^2} D_T D_T \vec{N}_1 + \frac{k_1'}{k_1^2} D_T D_T \vec{N}_1 - \frac{1}{k_1} D_T D_T D_T \vec{N}_1
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

eşitliği elde edilir. (4.9) eşitliğinde (4.4) eşitliğini yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılarak

$$
\begin{aligned}
D_T D_T \vec{N} &= \left(\frac{k_1'}{k_1^2} \right)' D_T \vec{N}_1 + \frac{k_1'}{k_1^2} D_T D_T \vec{N}_1 + \frac{k_1'}{k_1^2} D_T D_T \vec{N}_1 - \frac{1}{k_1} \left(D_T \vec{N}_1 \left(\frac{k_1''}{k_1} - k_2^2 - k_1^2 \right) - 3k_1' D_T \vec{N} \right) \\
&= \left(\frac{k_1'}{k_1^2} \right)' D_T \vec{N}_1 + \frac{k_1'}{k_1^2} D_T D_T \vec{N}_1 + \frac{k_1'}{k_1^2} D_T D_T \vec{N}_1 + D_T \vec{N}_1 \left(-\frac{k_1''}{k_1^2} + \frac{k_2^2}{k_1} + k_1 \right) + \frac{3k_1'}{k_1} D_T \vec{N} \\
&= \left(\left(\frac{k_1'}{k_1^2} \right)' - \frac{k_1''}{k_1^2} + \frac{k_2^2}{k_1} + k_1 \right) D_T \vec{N}_1 + \frac{2k_1'}{k_1^2} D_T D_T \vec{N}_1 + \frac{3k_1'}{k_1} D_T \vec{N}
\end{aligned}
$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde (4.5) ve (4.3) eşitlikleri yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılır; yani,

$$
\begin{aligned}
D_T D_T \vec{N} &= \left(\left(\frac{k_1'}{k_1^2} \right)' - \frac{k_1''}{k_1^2} + \frac{k_2^2}{k_1} + k_1 \right) D_T \vec{N}_1 + \frac{2k_1'}{k_1^2} \left(-k_1' \vec{N} - k_1^2 \vec{N}_1 - k_1 k_2 \vec{N}_2 \right) + \frac{3k_1'}{k_1} D_T \vec{N} \\
&= \left(\left(\frac{k_1'}{k_1^2} \right)' - \frac{k_1''}{k_1^2} + \frac{k_2^2}{k_1} + k_1 \right) D_T \vec{N}_1 - \frac{2(k_1')^2}{k_1^2} \vec{N} - 2k_1' \vec{N}_1 - \frac{2k_1' k_2}{k_1} \vec{N}_2 + \frac{3k_1'}{k_1} \left(k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2 \right) \\
&= \left(\left(\frac{k_1'}{k_1^2} \right)' - \frac{k_1''}{k_1^2} + \frac{k_2^2}{k_1} + k_1 \right) D_T \vec{N}_1 + k_1' \vec{N}_1 + \frac{k_1' k_2}{k_1} \vec{N}_2 - \frac{2(k_1')^2}{k_1^2} \vec{N}
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

eşitliği elde edilir ve diğer yandan $D_T D_T \vec{N}$ ifadesini hesaplamak için (4.3) denklemlerinde ilgili denklemin kovaryant türevini alarak hesaplanır; yani,

$$
\begin{aligned}
D_T D_T \vec{N} &= D_T \left(k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2 \right) \\
&= k_1' \vec{N}_1 + k_1 D_T \vec{N}_1 + k_2' \vec{N}_2 + k_2 D_T \vec{N}_2 \\
&= k_1' \vec{N}_1 + k_1 D_T \vec{N}_1 + k_2' \vec{N}_2 - k_2^2 \vec{N}
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

kovaryant türev denklemi bulunur. Şimdi ise (4.10) ve (4.11) denklemlerini eşitleyerek

$$\frac{k_1' k_2}{k_1} = k_2'$$

denklemi yazılır. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} \frac{k_1'}{k_1} &= \frac{k_2'}{k_2} \\ k_2 k_1' &= k_1 k_2' \\ k_2 k_1' - k_1 k_2' &= 0 \\ \left(\frac{k_1}{k_2}\right)' &= 0 \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Burada türevi sıfır olan $\dfrac{k_1}{k_2}$ oranı sabittir, buradan α bir slant helistir.

Teorem 4.1.6. Birim hızlı bir α eğrisinin bir slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$D_T(D_T D_T \vec{N}_2) = D_T \vec{N}_2 \left(\frac{k_2''}{k_2} - k_2^2 - k_1^2 \right) - 3k_2' D_T \vec{N} \tag{4.12}$$

denklemini sağlar.

İspat. Kabul edelim ki α bir slant helistir. (4.12) denklemini ispatlamak için (4.3) denklemlerinden $D_T \vec{N}_2 = -k_2 \vec{N}$ denkleminin kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned} D_T(D_T \vec{N}_2) &= D_T(-k_2 \vec{N}) \\ &= -k_2' \vec{N} - k_2 D_T \vec{N} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte (4.3) denklemlerini yerine yazarak

$$\begin{aligned} D_T D_T \vec{N}_2 &= -k_2' \vec{N} - k_2(k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2) \\ &= -k_2' \vec{N} - k_1 k_2 \vec{N}_1 - k_2^2 \vec{N}_2 \end{aligned}$$

ifadesi elde edillir. Bu eşitlikte tekrar kovaryant türev alınıp (4.3) denklemleri yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
D_T(D_T D_T \vec{N}_2) &= D_T(-k_2{}' \vec{N} - k_1 k_2 \vec{N}_1 - k_2^2 \vec{N}_2) \\
&= -k_2'' \vec{N} - k_2' D_T \vec{N} - 2k_2 k_2' \vec{N}_2 - k_2^2 D_T \vec{N}_2 - (k_1' k_2 + k_1 k_2')\vec{N}_1 - k_1 k_2 D_T \vec{N}_1 \\
&= -k_2'' \vec{N} - k_2' D_T \vec{N} - 2k_2 k_2' \vec{N}_2 - (k_1' k_2 + k_1 k_2')\vec{N}_1 - k_1 k_2(-k_1 \vec{N}) - k_2^2 D_T \vec{N}_2 \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

eşitliği bulunur. α slant helis olduğundan $\frac{k_1}{k_2} = sbt$ yazılır ve buradan (4.7) eşitliği (4.13) denkleminde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
D_T(D_T D_T \vec{N}_2) &= -k_2{}'' \vec{N} + k_1^2 k_2 \vec{N} - k_2{}' D_T \vec{N} - 2k_2' \underbrace{(k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2)}_{D_T \vec{N}} - k_2^2 D_T \vec{N}_2 \\
&= (-k_2'' + k_1^2 k_2)\vec{N} - k_2^2 D_T \vec{N}_2 - 3k_2' D_T \vec{N} \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

eşitliği bulunur ve diğer taraftan (4.3) denklemlerinden

$$
N = \frac{-1}{k_2} D_T \vec{N}_2 \qquad (4.15)
$$

eşitliği yazılabilir. (4.15) eşitliğini (4.14) denkleminde yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
D_T(D_T D_T \vec{N}_2) &= (-k_2'' + k_1^2 k_2)\left(\frac{-1}{k_2} D_T \vec{N}_2\right) - k_2^2 D_T \vec{N}_2 - 3k_2' D_T \vec{N} \\
&= D_T \vec{N}_2 \left(\frac{k_2''}{k_2} - k_2^2 - k_1^2\right) - 3k_2' D_T \vec{N}
\end{aligned}
$$

(4.12) eşitliği elde edilmiş olup ispatın bir yönü ispatlanmış olur. Tersine, (4.12) eşitliğini doğru kabul edip α eğrisinin slant helis olduğunu bezer şekilde gösterilir.

Teorem 4.1.7. Üç boyutlu Öklid uzayında alınan birim hızlı bir α eğrisinin bir slant helis olması için gerek ve yeter şart

i. $$D_T(D_T D_T \vec{N}) = D_T \vec{N} \left(\frac{k_1''}{k_1} - k_1^2 - k_2{}^2 \right) + 3k_1' D_T \vec{N}_1 + 3k_2' D_T \vec{N}_2 \qquad (4.16)$$

ii. $$D_T(D_T D_T \vec{N}) = D_T \vec{N} \left(\frac{k_2''}{k_2} - k_1^2 - k_2{}^2 \right) + 3k_1' D_T \vec{N}_1 + 3k_2' D_T \vec{N}_2 \qquad (4.17)$$

iii. $$D_T(D_T D_T \vec{N}) = D_T\vec{N}\left(\frac{k_1''}{2k_1}+\frac{k_2''}{2k_2}-k_1^2-k_2^2\right)+3k_1'D_T\vec{N}_1+3k_2'D_T\vec{N}_2 \tag{4.18}$$

i, ii, iii durumlarından birini sağlar.

İspat. Kabul edelim ki α bir slant helistir. (4.16), (4.17) ve (4.18) eşitliklerini göstermek için (4.3) denklemlerinden $D_T\vec{N} = k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2$ denkleminin kovaryant türevi alınıp gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\begin{aligned}
D_T(D_T\vec{N}) &= D_T(k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2)\\
&= k_1'\vec{N}_1 + k_1 D_T\vec{N}_1 + k_2'\vec{N}_2 + k_2 D_T\vec{N}_2\\
&= -k_1^2\vec{N} - k_2^2\vec{N} + k_1'\vec{N}_1 + k_2'\vec{N}_2
\end{aligned}$$

denklemi bulunur. Bu eşitliğin tekrar kovaryant türevi alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
D_T(D_T D_T\vec{N}) &= D_T(-k_1^2\vec{N} - k_2^2\vec{N} + k_1'\vec{N}_1 + k_2'\vec{N}_2)\\
&= -2k_1k_1'\vec{N} - k_1^2 D_T\vec{N} - 2k_2k_2'\vec{N} - k_2^2 D_T\vec{N} + k_1''\vec{N}_1 + k_1'D_T\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2 + k_2'D_T\vec{N}_2
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğe (4.3) denklemlerini tatbik edip gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
D_T(D_T D_T\vec{N}) &= 2k_1'D_T\vec{N}_1 + 2k_2'D_T\vec{N}_2 - k_1^2 D_T\vec{N} - k_2^2 D_T\vec{N} + k_1''\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2 + k_1'D_T\vec{N}_1 + k_2'D_T\vec{N}_2\\
&= 3k_1'D_T\vec{N}_1 + 3k_2'D_T\vec{N}_2 - D_T\vec{N}(k_1^2 + k_2^2) + k_1''\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2
\end{aligned} \tag{4.19}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi ise $k_1''\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2$ ifadenin özdeşliklerini bulmaya çalışalım. Bunun için α eğrisi slant helis olduğundan $\frac{k_1}{k_2} = sbt$ yazılabilir. Bu eşitlikte türev alınırsa

$$\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' = 0$$

eşiti bulunur. Burada bölüm türevi uygulanırsa

$$\frac{k_1'k_2 - k_1k_2'}{k_2^2} = 0$$

$$k_1'k_2 - k_1k_2' = 0 \tag{4.20}$$

$$k_1'k_2 = k_1k_2'$$

eşitliği elde edilir. (4.20) eşitliğinden

$$\frac{k_1'}{k_2'} = \frac{k_1}{k_2} \tag{4.21}$$

yazılabilir. Burada $\frac{k_1}{k_2} = sbt$ olduğundan $\frac{k_1'}{k_2'} = sbt$ olduğu açıktır. Burada tekrar bölüm türevini uygularsak

$$\begin{aligned} \frac{k_1''k_2' - k_1'k_2''}{k_2'^2} &= 0 \\ k_1''k_2' - k_1'k_2'' &= 0 \\ k_1''k_2' &= k_1'k_2'' \\ \frac{k_1''}{k_2''} &= \frac{k_1'}{k_2'} \end{aligned} \tag{4.22}$$

eşitliği elde edilir. (4.21) ve (4.22) eşitlikleri göz önüne alarak

$$\frac{k_1''}{k_2''} = \frac{k_1'}{k_2'} = \frac{k_1}{k_2}$$

$$\frac{k_1''}{k_2''} = \frac{k_1}{k_2}$$

$$k_1''k_2 = k_1k_2'' \tag{4.23}$$

eşitliği yazılabilir. (4.23) eşitliği $\frac{k_1''}{k_1} = \frac{k_2''}{k_2} = a$ ile ifade edilir. $k_1''\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2$ ifadesini

$$\begin{aligned} k_1''\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2 &= \frac{k_1''}{k_1}k_1\vec{N}_1 + \frac{k_2''}{k_2}k_2\vec{N}_2 \\ &= ak_1\vec{N}_1 + ak_2\vec{N}_2 \\ &= a(k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2) \\ &= aD_T\vec{N} \end{aligned} \tag{4.24}$$

eşitliği ile gösterilebilir. (4.24) denkleminde $\dfrac{k_1''}{k_1}=a$ ve $\dfrac{k_2''}{k_2}=a$ eşitlikleri ayrı ayrı düşünüldüğünde

$$k_1''\vec{N}_1+k_2''\vec{N}_2=\frac{k_1''}{k_1}D_T\vec{N} \qquad \text{veya} \qquad k_1''\vec{N}_1+k_2''\vec{N}_2=\frac{k_2''}{k_2}D_T\vec{N} \tag{4.25}$$

karakterizasyonları elde edilir. (4.25) eşitliklerini (4.19) denkleminde ayrı ayrı yazıp gerekli düzenlemeler yaparak

$$\begin{aligned}D_T(D_TD_T\vec{N}) &= -D_T\vec{N}(k_1^2+k_2^2)+\frac{k_1''}{k_1}D_T\vec{N}+3k_1'D_T\vec{N}_1+3k_2'D_T\vec{N}_2\\ &= D_T\vec{N}\left(\frac{k_1''}{k_1}-k_1^2-k_2^2\right)+3k_1'D_T\vec{N}_1+3k_2'D_T\vec{N}_2\end{aligned}$$

(4.16) denklemi bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}D_T(D_TD_T\vec{N}) &= -D_T\vec{N}(k_1^2+k_2^2)+\frac{k_2''}{k_2}D_T\vec{N}+3k_1'D_T\vec{N}_1+3k_2'D_T\vec{N}_2\\ &= D_T\vec{N}\left(\frac{k_2''}{k_2}-k_1^2-k_2^2\right)+3k_1'D_T\vec{N}_1+3k_2'D_T\vec{N}_2\end{aligned}$$

(4.18) eşitliği de bulunur. (4.19) eşitliğini göstermek için

$$D_T\vec{N}\left(\frac{k_1''}{k_1}+\frac{k_2''}{k_2}\right)$$

ifadesinin farklı bir temsilini bulmaya çalışalım; yani,

$$\begin{aligned}D_T\vec{N}\left(\frac{k_1''}{k_1}+\frac{k_2''}{k_2}\right) &= \left(k_1\vec{N}_1+k_2\vec{N}_2\right)\left(\frac{k_1''}{k_1}+\frac{k_2''}{k_2}\right)\\ &= k_1''\vec{N}_1+k_2''\vec{N}_2+\frac{k_1k_2''}{k_2}\vec{N}_1+\frac{k_1''k_2}{k_1}\vec{N}_2\end{aligned} \tag{4.26}$$

(4.23) eşitliği (4.26) denkleminde yerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
D_T \vec{N}\left(\frac{k_1''}{k_1}+\frac{k_2''}{k_2}\right) &= k_1''\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2 + \frac{k_1''k_2}{k_2}\vec{N}_1 + \frac{k_1k_2''}{k_1}\vec{N}_2 \\
&= k_1''\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2 + k_1''\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2 \\
&= 2\left(k_1''\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2\right) \qquad (4.27)
\end{aligned}
$$

ifadesi bulunur. (4.27) denkleminde her iki taraf sadeleştirildiğinde

$$
k_1''\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2 = D_T \vec{N}\left(\frac{k_1''}{2k_1}+\frac{k_2''}{2k_2}\right)
$$

eşitliği bulunur. Bu eşitliği (4.19) denkleminde yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılarak

$$
\begin{aligned}
D_T(D_T D_T \vec{N}) &= -D_T \vec{N}(k_1^2+k_2^2) + D_T\vec{N}\left(\frac{k_1''}{2k_1}+\frac{k_2''}{2k_2}\right) + 3k_1' D_T\vec{N}_1 + 3k_2' D_T \vec{N}_2 \\
&= D_T\vec{N}\left(\frac{k_1''}{2k_1}+\frac{k_2''}{2k_2} - k_1^2 - k_2^2\right) + 3k_1' D_T\vec{N}_1 + 3k_2' D_T\vec{N}_2
\end{aligned}
$$

(4.18) denklemi elde edilir. Böylece ispatın bir yönü tamamlanır. Tersine, (4.16), (4.17) ve (4.18) denklemlerini doğru kabul edip α eğrisinin slant helis olduğunu bezer şekilde gösterilir.

4.2. Minkowski Uzayında N-Bishop Çatısına Göre Slant Helislerin Bazı Karakterizasyonları

Bu bölümde üç boyutlu Minkowski uzayında timelike eğrinin, asli normali ve binormali spacelike olan spacelike eğrinin N-Bishop çatısına göre slant helislerin bazı karakterizasyonları incelenecektir.

4.2.1. Timelike Eğrinin N-Bishop Çatısına Göre Slant Helislerin Bazı Karakterizasyonları

Tanım 4.2.1.1. $\alpha : \mathrm{I} \to \mathrm{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında birim hızlı bir timelike eğri olsun. α timelike eğrisinin N-Bishop çatısına göre slant helis olması için $\vec{N}_1$ birim vektörü ile $\vec{u}$ sabit doğrultu vektörü arasındaki açının sabit olması gerekir; yani,

$$\forall s \in I \text{ için } \langle \vec{N}_1(s), \vec{u} \rangle = \lambda_1 (sbt)$$

koşulunu sağlayan α eğrisine slant helis denir.

Teorem 4.2.1.1. $\alpha : \mathrm{I} \rightarrow \mathrm{E}_1^3$ sıfırdan farklı k_1 ve k_2 N-Bishop çatının eğriliklerine sahip birim hızlı timelike eğridir. α eğrisi slant helis olması için gerek ve yeter şart $\forall s \in \mathrm{I}$ için $\dfrac{k_1}{k_2}$ sabit olmalıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$: α, E_1^3 de slant helis olsun. Slant helis tanımından $\left\{ \vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2 \right\}$ N-Bishop çatısına göre $\langle \vec{N}_1, \vec{u} \rangle = \lambda_1 (\text{sbt})$ yazılabilir. $\langle \vec{N}_1, \vec{u} \rangle = \lambda_1$ eşitliğinde türev alınıp $\langle \vec{N}_1', \vec{u} \rangle = 0$ türev denkleminde (3.7) denklemleri yerine yazılırsa

$$\langle k_1 \vec{N}, \vec{u} \rangle = 0 \text{ olur ve buradan } \langle \vec{N}, \vec{u} \rangle = 0$$

eşitliği bulunur. Bulduğumuz eşitlikte tekrar türev alınırsa; yani, $\langle \vec{N}, \vec{u} \rangle = 0$ ifadesinin türevi

$$\langle \vec{N}', \vec{u} \rangle = 0$$

bulunur. (3.7) denklemlerini yazarsak

$$\langle k_1 \vec{N}_1 - k_2 \vec{N}_2, \vec{u} \rangle = 0$$

eşiti bulunur. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned} k_1 \langle \vec{N}_1, \vec{u} \rangle - k_2 \langle \vec{N}_2, \vec{u} \rangle &= 0 \\ k_1(\lambda_1) - k_2(\lambda_2) &= 0 \\ \frac{k_1}{k_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} &= \lambda\,(sbt) \end{aligned}$$

elde edilir. $\langle \vec{N}, \vec{u} \rangle = 0$ eşitliğinden $\vec{u} \in s_p \left\{ \vec{N}_1, \vec{N}_2 \right\}$ olup burada α eğrisi timelike olduğundan $\left\{ \vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2 \right\}$ N-Bishop çatısının vektörleri $\vec{N}$ ve $\vec{N}_2$ spacelike, $\vec{N}_1$ timelike vektörlerdir. Buna göre

$$\vec{u} = (-\lambda_1)\vec{N}_1 + (\lambda_2)\vec{N}_2 \tag{4.28}$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlikte türev alınırsa,

$$\begin{aligned} \vec{u}' &= (-\lambda_1)\vec{N}_1{}' + (\lambda_2)\vec{N}_2{}' \\ &= (-\lambda_1)(k_1\vec{N}) + (\lambda_2)(k_2\vec{N}) \\ &= \left[-k_1(\lambda_1) + k_2(\lambda_2)\right]\vec{N} = \vec{0} \end{aligned}$$

türevi sıfır olan eşitliği bulunur ve $\vec{u}$ sabit olur. Böylece ispatın bir yönü ispatlanmış olur.

$(\Leftarrow)$: $\dfrac{k_1}{k_2} = sbt$ olduğunu kabul edelim. O halde $\dfrac{k_1}{k_2} = \lambda$ ve λ sabit sayısına karşılık gelen $\lambda = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$ eşitliği alınabilir. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned} \frac{k_1}{k_2} &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \\ k_1(\lambda_1) - k_2(\lambda_2) &= 0 \end{aligned}$$

eşiti bulunur. (4.28) denkleminde türev alınırsa

$$\begin{aligned} \vec{u}' &= (-\lambda_1)\vec{N}_1' + (\lambda_2)\vec{N}_2' \\ &= (-\lambda_1)(k_1\vec{N}) + (\lambda_2)(k_2\vec{N}) \\ &= \left[-k_1(\lambda_1) + k_2(\lambda_2)\right]\vec{N} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

türevi sıfır olan eşitliği bulunur ve $\vec{u}$ sabit olur. Şimdi $\langle \vec{N}_1, \vec{u} \rangle$ ifadesinin sabit olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \langle \vec{N}_1, \vec{u} \rangle &= \langle \vec{N}_1, (-\lambda_1)\vec{N}_1 + (\lambda_2)\vec{N}_2 \rangle \\ &= (-\lambda_1)\langle \vec{N}_1, \vec{N}_1 \rangle + (\lambda_2)\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle \\ &= (-\lambda_1)\underbrace{\langle \vec{N}_1, \vec{N}_1 \rangle}_{-1} + (\lambda_2)\underbrace{\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle}_{0} \\ &= \lambda_1(sbt) \end{aligned}$$

buradan α eğrisinin slant helis olduğunu göstermiş olup ispatı tamamlanır.

Teorem 4.2.1.2. $\alpha : \mathrm{I} \to \mathrm{E}_1^3$ sıfırdan farklı k_1 ve k_2 N-Bishop çatısının eğriliklerine sahip birim hızlı timelike eğridir. α slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\det\left(\vec{N}_1', \vec{N}_1'', \vec{N}_1'''\right) = 0$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $(\Rightarrow)$: α slant helis olsun. Bu durumda $\dfrac{k_1}{k_2}$ sabittir. (3.7) denklemlerinden $\vec{N}_1' = k_1\vec{N}$ denkleminin türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\vec{N}_1'' &= k_1'\vec{N} + k_1\vec{N}' \\
&= k_1'\vec{N} + k_1\left(k_1\vec{N}_1 - k_2\vec{N}_2\right) \\
&= k_1'\vec{N} + k_1^2\vec{N}_1 - k_1k_2\vec{N}_2
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikte tekrar türev alıp (3.7) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
\vec{N}_1''' &= 2k_1k_1'\vec{N}_1 + k_1^2(k_1\vec{N}) + k_1''\vec{N} + k_1'(k_1\vec{N}_1 - k_2\vec{N}_2) - k_1'k_2\vec{N}_2 - k_2'k_1\vec{N}_2 - k_1k_2(k_2\vec{N}) \\
&= (k_1^3 + k_1'' - k_1k_2^2)\vec{N} + (3k_1k_1')\vec{N}_1 + (-2k_1'k_2 - k_2'k_1)\vec{N}_2
\end{aligned}$$

ifadesi bulunur. Şimdi bulduğumuz eşitlikleri kullanarak $\det\left(\vec{N}_1', \vec{N}_1'', \vec{N}_1'''\right)$ determinant ifadesinde sırasıyla yerleştirerek gerekli hesaplamalar yapılır; yani,

$$\begin{aligned}
\det\left(\vec{N}_1', \vec{N}_1'', \vec{N}_1'''\right) &= \begin{vmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ k_1' & k_1^2 & -k_1k_2 \\ k_1^3 + k_1'' - k_1k_2^2 & 3k_1k_1' & -2k_1'k_2 - k_2'k_1 \end{vmatrix} \\
&= k_1\left[-2k_1'k_2k_1^2 - k_2'k_1^3 + 3k_1^2k_2k_1'\right] \\
&= k_1\left[k_1^2k_2k_1' - k_2'k_1^3\right] \\
&= k_1^3\left[k_2k_1' - k_1k_2'\right] \\
&= k_1^3k_2^2\left[\frac{k_1}{k_2}\right]'
\end{aligned} \tag{4.29}$$

eşitliği bulunur. α slant helis olduğundan $\frac{k_1}{k_2}$ sabittir. Sabitin türevi sıfır olduğundan

$$\left[\frac{k_1}{k_2}\right]' = 0$$

eşitliği yazılır. (4.29) eşitliğinden determinant ifadesi $\det\left(\vec{N}_1', \vec{N}_1'', \vec{N}_1'''\right) = 0$ olur

$(\Leftarrow)$: $\det\left(\vec{N}_1', \vec{N}_1'', \vec{N}_1'''\right) = 0$ eşitliğini kabul edelim. (4.29) eşitliğinden

$$\det\left(\vec{N}_1', \vec{N}_1'', \vec{N}_1'''\right) = k_1^3 k_2^2 \left[\frac{k_1}{k_2}\right]' = 0$$

yazılabilir. Buradan $\left[\frac{k_1}{k_2}\right]' = 0$, $k_2 \neq 0$, $k_1 \neq 0$ eşitlikleri elde edilir ki türevi sıfır olan $\frac{k_1}{k_2}$ oranı sabit olduğu için α bir slant helistir, böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.1.3. $\alpha : \mathrm{I} \to \mathrm{E}_1^3$ sıfırdan farklı k_1 ve k_2 N-Bishop çatısının eğriliklerine sahip birim hızlı timelike eğridir. α slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\det\left(\vec{N}_2', \vec{N}_2'', \vec{N}_2'''\right) = 0$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $(\Rightarrow)$: α slant helis olsun. (3.7) denklemlerinden

$$\vec{N}_2' = k_2 \vec{N}$$

eşitinin türevini alırsak

$$\vec{N}_2'' = k_2' \vec{N} + k_2 \vec{N}'$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikte (3.7) denklemleri yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \vec{N}_2'' &= k_2'\vec{N} + k_2\left(k_1\vec{N}_1 - k_2\vec{N}_2\right) \\ &= k_2'\vec{N} + k_1k_2\vec{N}_1 - k_2^{\,2}\vec{N}_2 \end{aligned}$$

ifadesi bulunur. Bu ifadede tekrar türev alınıp (3.7) denklemleri yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\begin{aligned} \vec{N}_2''' &= k_1'k_2\vec{N}_1 + k_1k_2'\vec{N}_1 + k_1k_2\vec{N}_1' + k_2''\vec{N} + k_2'\vec{N}' - 2k_2k_2'\vec{N}_2 - k_2^{\,2}\vec{N}_2' \\ &= k_1'k_2\vec{N}_1 + k_1k_2'\vec{N}_1 + k_1k_2(k_1\vec{N}) + k_2''\vec{N} + k_2'(k_1\vec{N}_1 - k_2\vec{N}_2) - 2k_2k_2'\vec{N}_2 - k_2^{\,2}(k_2\vec{N}) \\ &= (-k_2^{\,3} + k_2'' + k_2k_1^{\,2})\vec{N} + (2k_1k_2' + k_2k_1')\vec{N}_1 + (-3k_2k_2')\vec{N}_2 \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Şimdi $\det\left(\vec{N}_2', \vec{N}_2'', \vec{N}_2'''\right)$ ifadesini hesaplamak için bulduğumuz eşitlikleri determinant ifadesinde yerine yazılarak gerekli hesaplamalar yapılır; yani,

$$\begin{aligned} \det\left(\vec{N}_2', \vec{N}_2'', \vec{N}_2'''\right) &= \begin{vmatrix} k_2 & 0 & 0 \\ k_2' & k_1k_2 & -k_2^{\,2} \\ -k_2^{\,3} + k_2'' + k_2k_1^{\,2} & 2k_1k_2' + k_2k_1' & -3k_2k_2' \end{vmatrix} \\ &= k_2(-3k_1k_2^{\,2}k_2' + 2k_1k_2^{\,2}k_2' + k_2^{\,3}k_1') \\ &= k_2(k_2^{\,3}k_1' - k_1k_2^{\,2}k_2') \\ &= k_2^{\,3}(k_2k_1' - k_1k_2') \\ &= k_2^{\,5}\left[\frac{k_1}{k_2}\right]' \end{aligned} \tag{4.30}$$

eşitliği bulunur. α slant helis olduğundan $\frac{k_1}{k_2}$ sabittir. O halde $\left[\frac{k_1}{k_2}\right]' = 0$ dır. Buradan,

$$\det\left(\vec{N}_2', \vec{N}_2'', \vec{N}_2'''\right) = 0$$

elde edilir.

$(\Leftarrow)$: $\det\left(\vec{N}_2', \vec{N}_2'', \vec{N}_2'''\right) = 0$ denklemini kabul edelim. (4.30) eşitliğinden

$$\det\left(\vec{N}_2', \vec{N}_2'', \vec{N}_2'''\right) = {k_2}^5 \left[\frac{k_1}{k_2}\right]' = 0 \quad , \; k_2 \neq 0$$

eşitlikleri yazılacağından $\left[\dfrac{k_1}{k_2}\right]' = 0$ elde edilir ki türevi sıfır olan $\dfrac{k_1}{k_2}$ oranı sabittir. O halde α bir slant helistir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.1.4. $\alpha : \mathrm{I} \to \mathrm{E}_1^3$ sıfırdan farklı k_1 ve k_2 N-Bishop çatısının eğriliklerine sahip birim hızlı timelike eğridir. α slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\det\left(\vec{N}', \vec{N}'', \vec{N}'''\right) = 0$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $(\Rightarrow): \alpha$ slant helis olsun. (3.7) denklemlerinden $\vec{N}' = k_1\vec{N}_1 - k_2\vec{N}_2$ denkleminin türevini aldıktan sonra (3.7) denklemleri yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılır; yani,

$$\begin{aligned} \vec{N}' &= k_1\vec{N}_1 - k_2\vec{N}_2 \\ \vec{N}'' &= {k_1}'\vec{N}_1 + k_1(k_1\vec{N}) - {k_2}'\vec{N}_2 - k_2(k_2\vec{N}) \\ &= ({k_1}^2 - {k_2}^2)\vec{N} + {k_1}'\vec{N}_1 - {k_2}'\vec{N}_2 \end{aligned} \tag{4.31}$$

türev eşitliği elde edilir. (4.31) eşitliğinde tekrar türev alınarak (3.7) denklemleri yerini yazılır gerekli düzenlemeler yapılır; yani,

$$\begin{aligned} \vec{N}''' &= (2k_1{k_1}' - 2k_2{k_2}')\vec{N} + ({k_1}^2 - {k_2}^2)\vec{N}' + {k_1}''\vec{N}_1 + {k_1}'\vec{N}_1' - {k_2}''\vec{N}_2 - {k_2}'\vec{N}_2' \\ &= (2k_1{k_1}' - 2k_2{k_2}')\vec{N} + ({k_1}^2 - {k_2}^2)(k_1\vec{N}_1 - k_2\vec{N}_2) + {k_1}''\vec{N}_1 + {k_1}'(k_1\vec{N}) - {k_2}''\vec{N}_2 - {k_2}'(k_2\vec{N}) \\ &= (3k_1{k_1}' - 3k_2{k_2}')\vec{N} + ({k_1}'' + {k_1}^3 - k_1{k_2}^2)\vec{N}_1 + (-{k_2}'' - {k_1}^2k_2 + {k_2}^3)\vec{N}_2 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi $\det\left(\vec{N}', \vec{N}'', \vec{N}'''\right)$ ifadesini hesaplamak için aşağıdaki determinant eşitliğinde bu bulduğumuz eşitlikleri yerine yazıp gerekli hesaplamalar düzenlemeler yapılır; yani,

$$\det\left(\vec{N}',\vec{N}'',\vec{N}'''\right)=\begin{vmatrix} 0 & k_1 & -k_2 \\ (k_1^2-k_2^2) & k_1' & -k_2' \\ (3k_1k_1'-3k_2k_2') & (k_1''+k_1^3-k_1k_2^2) & (-k_2''-k_1^2k_2+k_2^3) \end{vmatrix}$$

$$=-k_1\left[(k_1^2-k_2^2)(-k_2''-k_1^2k_2+k_2^3)+3k_1k_1'k_2'-3k_2k_2'^2\right]$$

$$-k_2\left[(k_1^2-k_2^2)(k_1''+k_1^3-k_1k_2^2)-3k_1k_1'^2+3k_2k_2'k_1'\right]$$

$$=\left(3k_1k_2^2k_1'-3k_2^3k_2'\right)\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'-\left(k_1^2-k_2^2\right)\left[k_2k_1''-k_1k_2''\right]$$

$$=\left(3k_1k_2^2k_1'-3k_2^3k_2'\right)\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'-\left[\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2-1\right]\left[\left(\frac{k_1}{k_2}\right)''k_2^4+2k_2^3k_2'\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right] \tag{4.32}$$

determinantın eşitliği bulunur. α slant helis olduğundan $\frac{k_1}{k_2}$ sabittir. Sabitin türevi

$$\left[\frac{k_1}{k_2}\right]'=0$$

olup (4.32) denkleminden $\det\left(\vec{N}',\vec{N}'',\vec{N}'''\right)=0$ olur, böylece ispatın bir yönü tamamlanır.

$(\Leftarrow)$: $\det\left(\vec{N}',\vec{N}'',\vec{N}'''\right)=0$ eşitliğini kabul edelim. (4.32) eşitliğinden $\left[\frac{k_1}{k_2}\right]'=0$ elde edlir. Türevi sıfır olan $\frac{k_1}{k_2}$ oranı sabittir, buradan α slant helistir ve ispat tamamlanır.

Minkowski 3-uzayında alınan bir α timelike eğrisi slant helis olsun. O zaman N-Bishop çatısının $\alpha'(s)=T$ vektörüne göre kovaryant türev denklemleri

$$\begin{aligned} D_T\vec{N} &= k_1\vec{N}_1-k_2\vec{N}_2 \\ D_T\vec{N}_1 &= k_1\vec{N} \\ D_T\vec{N}_2 &= k_2\vec{N} \end{aligned} \tag{4.33}$$

ile yazılır. Herhangi $s \in I$ için $\vec{N}_1(s)$ ve $\vec{N}_2(s)$ vektör alanları olup k_1 ve k_2 eğrilikleri s parametreli fonksiyonlardır.

Teorem 4.2.1.5. Minkowski 3-uzayında birim hızlı bir timelike α eğrisinin bir slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$D_T(D_T D_T \vec{N}_1) = D_T \vec{N}_1 \left(\frac{k_1''}{k_1} - k_2^2 + k_1^2\right) + 3k_1' D_T \vec{N} \tag{4.34}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $(\Rightarrow)$: Farz edelim ki α slant helis olsun. (4.34) eşitliğini ispatlamak için öncelikle (4.33) eşitliklerinden $D_T \vec{N}_1 = k_1 \vec{N}$ eşitliğin kovaryant türevi alınır; yani,

$$\begin{aligned} D_T(D_T \vec{N}_1) &= D_T(k_1 \vec{N}) \\ &= k_1' \vec{N} + k_1 D_T \vec{N} \end{aligned} \tag{4.35}$$

eşitliği bulunur. (4.35) eşitliğinde (4.33) eşitliklerini yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılır; yani,

$$D_T(D_T \vec{N}_1) = k_1' \vec{N} + k_1^2 \vec{N}_1 - k_1 k_2 \vec{N}_2 \tag{4.36}$$

denklemi bulunur. (4.36) eşitliğin tekrar kovaryant türevini alıp (4.33) eşitliklerini yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılır; yani,

$$\begin{aligned} D_T(D_T D_T \vec{N}_1) &= D_T(k_1' \vec{N} + k_1^2 \vec{N}_1 - k_1 k_2 \vec{N}_2) \\ &= k_1'' \vec{N} + k_1' D_T \vec{N} + 2k_1 k_1' \vec{N}_1 + k_1^2 D_T \vec{N}_1 - (k_1' k_2 + k_1 k_2') \vec{N}_2 - k_1 k_2 D_T \vec{N}_2 \\ &= k_1'' \vec{N} + k_1' D_T \vec{N} + 2k_1 k_1' \vec{N}_1 - (k_1' k_2 + k_1 k_2') \vec{N}_2 - k_1 k_2 (k_2 \vec{N}) + k_1^2 D_T \vec{N}_1 \end{aligned} \tag{4.37}$$

denklemi bulunur. α slant helis olduğundan $\dfrac{k_1}{k_2}$ oranı sabittir. Bu orana bölüm türevini uygulayıp gerekli düzenlemeler yapılırsa; yani,

$$\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' = 0$$

$$\frac{k_1' k_2 - k_1 k_2'}{k_2^2} = 0$$

$$k_1' k_2 - k_1 k_2' = 0$$

$$k_1' k_2 = k_1 k_2' \tag{4.38}$$

eşitliği elde edilir. (4.38) denklemini (4.37) denkleminde yerine yazıp

$$D_T(D_T D_T \vec{N}_1) = k_1'' \vec{N} - k_1 k_2^2 \vec{N} + k_1' D_T \vec{N} + 2k_1' \left(\underbrace{k_1 \vec{N}_1 - k_2 \vec{N}_2}_{D_T \vec{N}}\right) + k_1^2 D_T \vec{N}_1 \tag{4.39}$$

denklemi bulunur. (4.33) denklemlerinden

$$N = \frac{1}{k_1} D_T \vec{N}_1 \tag{4.40}$$

eşitliği yazılabilir. (4.39) denkleminde (4.40) denklemini yerine yazıp ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} D_T(D_T D_T \vec{N}_1) &= (k_1'' - k_1 k_2^2)\left(\frac{1}{k_1} D_T \vec{N}_1\right) + k_1^2 D_T \vec{N}_1 + 3k_1' D_T \vec{N} \\ &= D_T \vec{N}_1\left(\frac{k_1''}{k_1} - k_2^2 + k_1^2\right) + 3k_1' D_T \vec{N} \end{aligned}$$

(4.34) denklemi elde edilir, böylece ispatın bir yönü tamamlanır.

$(\Leftarrow)$: Tersine (4.34) denklemini kabul edelim. Bu durumda α eğrisinin bir slant helis olduğu gösterilir. Bunun için (4.40) denkleminin kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned} D_T \vec{N} &= D_T\left(\frac{1}{k_1} D_T \vec{N}_1\right) \\ &= -\frac{k_1'}{k_1^2} D_T \vec{N}_1 + \frac{1}{k_1} D_T D_T \vec{N}_1 \end{aligned} \tag{4.41}$$

eşitliği bulunur. (4.41) denkleminin tekrar kovaryant türevini alarak gerekli düzenlemeler yapılır; yani,

$$
\begin{aligned}
D_T D_T \vec{N} &= D_T\left(-\frac{k_1'}{k_1^2} D_T \vec{N}_1 + \frac{1}{k_1} D_T D_T \vec{N}_1\right) \\
&= -\left(\frac{k_1'}{k_1^2}\right)' D_T \vec{N}_1 - \frac{k_1'}{k_1^2} D_T D_T \vec{N}_1 - \frac{k_1'}{k_1^2} D_T D_T \vec{N}_1 + \frac{1}{k_1} D_T D_T D_T \vec{N}_1 \qquad (4.42
\end{aligned}
$$

eşitliği bulunur. (4.42) denkleminde (4.34) denklemi yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılarak

$$
\begin{aligned}
D_T D_T \vec{N} &= -\left(\frac{k_1'}{k_1^2}\right)' D_T \vec{N}_1 - \frac{k_1'}{k_1^2} D_T D_T \vec{N}_1 - \frac{k_1'}{k_1^2} D_T D_T \vec{N}_1 + \frac{1}{k_1}\left(D_T \vec{N}_1 \left(\frac{k_1''}{k_1} - k_2^2 + k_1^{\,2}\right) + 3k_1{}' D_T \vec{N}\right) \\
&= -\left(\frac{k_1'}{k_1^2}\right)' D_T \vec{N}_1 - \frac{k_1'}{k_1^2} D_T D_T \vec{N}_1 - \frac{k_1'}{k_1^2} D_T D_T \vec{N}_1 + D_T \vec{N}_1 \left(\frac{k_1''}{k_1^2} - \frac{k_2^2}{k_1} + k_1\right) + \frac{3k_1'}{k_1} D_T \vec{N} \\
&= \left(-\left(\frac{k_1'}{k_1^2}\right)' + \frac{k_1''}{k_1^2} - \frac{k_2^2}{k_1} + k_1\right) D_T \vec{N}_1 - \frac{2k_1'}{k_1^2} D_T D_T \vec{N}_1 + \frac{3k_1'}{k_1} D_T \vec{N}
\end{aligned}
$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde (4.36) ve (4.33) denklemleri yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılır; yani,

$$
\begin{aligned}
D_T D_T \vec{N} &= \left(-\left(\frac{k_1'}{k_1^2}\right)' + \frac{k_1''}{k_1^2} - \frac{k_2^2}{k_1} + k_1\right) D_T \vec{N}_1 - \frac{2k_1'}{k_1^2}\left(k_1{}' \vec{N} + k_1{}^2 \vec{N}_1 - k_1 k_2 \vec{N}_2\right) + \frac{3k_1'}{k_1}\left(k_1 \vec{N}_1 - k_2 \vec{N}_2\right) \\
&= \left(-\left(\frac{k_1'}{k_1^2}\right)' + \frac{k_1''}{k_1^2} - \frac{k_2^2}{k_1} + k_1\right) D_T \vec{N}_1 - \frac{2(k_1')^2}{k_1^2} \vec{N} - 2k_1' \vec{N}_1 + \frac{2k_1' k_2}{k_1} \vec{N}_2 + 3k_1' \vec{N}_1 - \frac{3k_1' k_2}{k_1} \vec{N}_2 \\
&= \left(-\left(\frac{k_1'}{k_1^2}\right)' + \frac{k_1''}{k_1^2} - \frac{k_2^2}{k_1} + k_1\right) D_T \vec{N}_1 + k_1' \vec{N}_1 - \frac{k_1' k_2}{k_1} \vec{N}_2 - \frac{2(k_1')^2}{k_1^2} \vec{N} \qquad (4.43)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir, diğer yandan (4.33) denklemlerinin kovaryant türevini alarak $D_T D_T N$ denklemi hesaplanır; yani,

$$
\begin{aligned}
D_T D_T \vec{N} &= D_T\left(k_1\vec{N}_1 - k_2\vec{N}_2\right)\\
&= k_1'\vec{N}_1 + k_1 D_T\vec{N}_1 - k_2'\vec{N}_2 - k_2 D_T\vec{N}_2\\
&= k_1'\vec{N}_1 + k_1 D_T\vec{N}_1 - k_2'\vec{N}_2 - k_2^2\vec{N}
\end{aligned} \tag{4.44}
$$

denklemi bulunur. Buradan (4.43) ve (4.44) denklemleri eşitlenerek

$$
\begin{aligned}
\frac{k_1'k_2}{k_1} &= k_2'\\
k_2k_1' &= k_1k_2'\\
k_2k_1' - k_1k_2' &= 0\\
\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' &= 0
\end{aligned}
$$

eşitliği bulunur. Türevi sıfır olan $\frac{k_1}{k_2}$ oranı sabit olur, buradan α bir slant helistir.

Teorem 4.2.1.6. Minkowski 3-uzayında birim hızlı bir timelike α eğrisinin bir slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$
D_T(D_TD_T\vec{N}_2) = D_T\vec{N}_2\left(\frac{k_2''}{k_2} - k_2^2 + k_1^2\right) - 3k_2'D_T\vec{N} \tag{4.45}
$$

denklemi sağlanır.

İspat. Kabul edelim ki α bir slant helistir. (4.45) denklemini ispatlamak için (4.33) denklemlerinden $D_T\vec{N}_2 = k_2\vec{N}$ eşitliğin kovaryant türevi alınırsa

$$
\begin{aligned}
D_T(D_T\vec{N}_2) &= D_T(k_2\vec{N})\\
&= k_2'\vec{N} + k_2D_T\vec{N}
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte (4.33) denklemleri yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
D_TD_T\vec{N}_2 &= k_2'\vec{N} + k_2(k_1\vec{N}_1 - k_2\vec{N}_2)\\
&= k_2'\vec{N} + k_1k_2\vec{N}_1 - k_2^2\vec{N}_2
\end{aligned} \tag{4.46}
$$

denklemi elde edillir. (4.46) denklemin tekrar kovaryant türevi alınıp (4.33) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
D_T(D_T D_T \vec{N}_2) &= D_T(k_2' \vec{N} + k_1 k_2 \vec{N}_1 - k_2^2 \vec{N}_2) \\
&= k_2'' \vec{N} + k_2' D_T \vec{N} - 2k_2 k_2' \vec{N}_2 - k_2^2 D_T \vec{N}_2 + (k_1' k_2 + k_1 k_2') \vec{N}_1 + k_1 k_2 D_T \vec{N}_1 \\
&= k_2'' \vec{N} + k_2' D_T \vec{N} - 2k_2 k_2' \vec{N}_2 + (k_1' k_2 + k_1 k_2') \vec{N}_1 + k_1 k_2 (k_1 \vec{N}) - k_2^2 D_T \vec{N}_2 \qquad (4.47)
\end{aligned}
$$

eşitliği bulunur. α slant helis olduğundan $\dfrac{k_1}{k_2}$ oranı sabittir. Bu oran sabit olduğundan (4.38) denklemi (4.47) denkleminde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
D_T(D_T D_T \vec{N}_2) &= k_2'' \vec{N} + k_1^2 k_2 \vec{N} + k_2' D_T \vec{N} + 2k_2' \underbrace{(k_1 \vec{N}_1 - k_2 \vec{N}_2)}_{D_T \vec{N}} - k_2^2 D_T \vec{N}_2 \\
&= (k_2'' + k_1^2 k_2) \vec{N} - k_2^2 D_T \vec{N}_2 + 3k_2' D_T \vec{N} \qquad (4.48)
\end{aligned}
$$

eşitliği bulunur, diğer yandan (4.33) denkleminden

$$
N = \frac{1}{k_2} D_T \vec{N}_2
$$

eşitliği (4.48) denkleminde yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
D_T(D_T D_T \vec{N}_2) &= (k_2'' + k_1^2 k_2)\left(\frac{1}{k_2} D_T \vec{N}_2\right) - k_2^2 D_T \vec{N}_2 + 3k_2' D_T \vec{N} \\
&= D_T \vec{N}_2 \left(\frac{k_2''}{k_2} - k_2^2 + k_1^2\right) - 3k_2' D_T \vec{N}
\end{aligned}
$$

(4.45) denklemi bulunur ve ispatın bir yönü tamamlanır. Tersine (4.45) denklemini kabul edip α eğrisinin slant helis olduğunu bezer şekilde gösterilir.

Teorem 4.2.1.7. Minkowski 3-uzayında alınan birim hızlı bir timelike α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart

i. $$D_T(D_T D_T \vec{N}) = D_T \vec{N} \left(\frac{k_1''}{k_1} + k_1^2 - k_2^2\right) + 3k_1' D_T \vec{N}_1 - 3k_2' D_T \vec{N}_2 \qquad (4.49)$$

ii. $$D_T(D_T D_T \vec{N}) = D_T\vec{N}\left(\frac{k_2''}{k_2} + k_1^2 - k_2^2\right) + 3k_1' D_T \vec{N}_1 - 3k_2' D_T \vec{N}_2 \tag{4.50}$$

iii. $$D_T(D_T D_T \vec{N}) = D_T\vec{N}\left(\frac{k_1''}{2k_1} + \frac{k_2''}{2k_2} + k_1^2 - k_2^2\right) + 3k_1' D_T \vec{N}_1 - 3k_2' D_T \vec{N}_2 \tag{4.51}$$

i, ii, iii durumlarından biri sağlanır.

İspat. Kabul edelim ki α bir slant helistir. (4.49), (4.50) ve (4.51) eşitliklerini göstermek için (4.33) denklemlerinden $D_T\vec{N} = k_1\vec{N}_1 - k_2\vec{N}_2$ eşitliğin kovaryant türevi alınıp gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\begin{aligned} D_T(D_T\vec{N}) &= D_T(k_1\vec{N}_1 - k_2\vec{N}_2) \\ &= k_1'\vec{N}_1 + k_1 D_T\vec{N}_1 - k_2'\vec{N}_2 - k_2 D_T\vec{N}_2 \\ &= k_1^2\vec{N} - k_2^2\vec{N} + k_1'\vec{N}_1 - k_2'\vec{N}_2 \end{aligned} \tag{4.52}$$

eşitliği bulunur. (4.52) eşitlikte tekrar kovaryant türev alıp (4.33) denklemlerini tatbik edip gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} D_T(D_T D_T\vec{N}) &= D_T(k_1^2\vec{N} - k_2^2\vec{N} + k_1'\vec{N}_1 - k_2'\vec{N}_2) \\ &= 2k_1k_1'\vec{N} + k_1^2 D_T\vec{N} - 2k_2k_2'\vec{N} - k_2^2 D_T\vec{N} + k_1''\vec{N}_1 + k_1' D_T\vec{N}_1 - k_2''\vec{N}_2 - k_2' D_T\vec{N}_2 \\ &= 2k_1' D_T\vec{N}_1 - 2k_2' D_T\vec{N}_2 + k_1^2 D_T\vec{N} - k_2^2 D_T\vec{N} + k_1''\vec{N}_1 - k_2''\vec{N}_2 + k_1' D_T\vec{N}_1 - k_2' D_T\vec{N}_2 \\ &= 3k_1' D_T\vec{N}_1 - 3k_2' D_T\vec{N}_2 + D_T\vec{N}(k_1^2 - k_2^2) + k_1''\vec{N}_1 - k_2''\vec{N}_2 \end{aligned} \tag{4.53}$$

eşitliği elde edilir. (4.53) eşitliğindeki $k_1''\vec{N}_1 - k_2''\vec{N}_2$ ifadenin özdeşliklerini bulmaya çalışalım: Bunun için α eğrisi slant helis olduğundan $\frac{k_1}{k_2} = sbt$ orantısı yazılabilir. Bu orantıdan (4.38) eşitliği yazılabilir. (4.38) eşitliğinden

$$\frac{k_1'}{k_2'} = \frac{k_1}{k_2} \tag{4.54}$$

yazılır. Burada $\frac{k_1}{k_2} = sbt$ orantısından $\frac{k_1'}{k_2'} = sbt$ olduğu açıktır. $\frac{k_1'}{k_2'} = sbt$ eşitliğinde tekrar bölüm türevi uygulanırsa

$$\frac{k_1''k_2' - k_1'k_2''}{k_2'^2} = 0$$
$$k_1''k_2' - k_1'k_2'' = 0$$
$$k_1''k_2' = k_1'k_2'' \tag{4.55}$$
$$\frac{k_1''}{k_2''} = \frac{k_1'}{k_2'}$$

eşitliği elde edilir. (4.54) ve (4.55) eşitlikleri göz önüne alırsak

$$\frac{k_1''}{k_2''} = \frac{k_1'}{k_2'} = \frac{k_1}{k_2}$$

eşitliği yazılır. Buradan

$$\frac{k_1''}{k_2''} = \frac{k_1}{k_2}$$
$$k_1''k_2 = k_1k_2'' \tag{4.56}$$

denklemi bulunur. (4.56) denkleminden

$$\frac{k_1''}{k_1} = \frac{k_2''}{k_2} = a \tag{4.57}$$

yazılabilir. $k_1''\vec{N}_1 - k_2''\vec{N}_2$ ifadesinin özdeşliklerini bulalım:

$$\begin{aligned} k_1''\vec{N}_1 - k_2''\vec{N}_2 &= \frac{k_1''}{k_1}k_1\vec{N}_1 - \frac{k_2''}{k_2}k_2\vec{N}_2 \\ &= ak_1\vec{N}_1 - ak_2\vec{N}_2 \\ &= a(k_1\vec{N}_1 - k_2\vec{N}_2) \\ &= aD_T\vec{N} \end{aligned} \tag{4.58}$$

(4.57) eşitliğinden $\frac{k_1''}{k_1} = a$ ve $\frac{k_2''}{k_2} = a$ eşitlikleri yazılır. Bu eşitlikler (4.58) özdeşliğinde ayrı ayrı düşünüldüğünde

$$k_1''\vec{N}_1 - k_2''\vec{N}_2 = \frac{k_1''}{k_1}D_T\vec{N} \quad \text{veya} \quad k_1''\vec{N}_1 - k_2''\vec{N}_2 = \frac{k_2''}{k_2}D_T\vec{N} \tag{4.59}$$

özdeşlikleri yazılır. (4.59) özdeşliklerini (4.58) denkleminde ayrı ayrı yazıp gerekli düzenlemeler yaparak

$$\begin{aligned} D_T(D_T D_T \vec{N}) &= D_T \vec{N}(k_1^2 - k_2^2) + \frac{k_1''}{k_1} D_T \vec{N} + 3k_1' D_T \vec{N}_1 - 3k_2' D_T \vec{N}_2 \\ &= D_T \vec{N}\left(\frac{k_1''}{k_1} + k_1^2 - k_2^2\right) + 3k_1' D_T \vec{N}_1 - 3k_2' D_T \vec{N}_2 \end{aligned}$$

(4.49) eşitliği bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} D_T(D_T D_T \vec{N}) &= D_T \vec{N}(k_1^2 - k_2^2) + \frac{k_2''}{k_2} D_T \vec{N} + 3k_1' D_T \vec{N}_1 - 3k_2' D_T \vec{N}_2 \\ &= D_T \vec{N}\left(\frac{k_2''}{k_2} + k_1^2 - k_2^2\right) + 3k_1' D_T \vec{N}_1 - 3k_2' D_T \vec{N}_2 \end{aligned}$$

(4.50) eşitliği de bulunur. (4.51) eşitliğini göstermek için

$$D_T \vec{N}\left(\frac{k_1''}{k_1} + \frac{k_2''}{k_2}\right)$$

bulunur. Buna göre

$$\begin{aligned} D_T \vec{N}\left(\frac{k_1''}{k_1} + \frac{k_2''}{k_2}\right) &= \left(k_1 \vec{N}_1 - k_2 \vec{N}_2\right)\left(\frac{k_1''}{k_1} + \frac{k_2''}{k_2}\right) \\ &= k_1'' \vec{N}_1 - k_2'' \vec{N}_2 + \frac{k_1 k_2''}{k_2} \vec{N}_1 - \frac{k_1'' k_2}{k_1} \vec{N}_2 \end{aligned}$$

özdeşliğinde (4.56) eşitliği yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} D_T \vec{N}\left(\frac{k_1''}{k_1} + \frac{k_2''}{k_2}\right) &= k_1'' \vec{N}_1 - k_2'' \vec{N}_2 + \frac{k_1'' k_2}{k_2} \vec{N}_1 - \frac{k_1 k_2''}{k_1} \vec{N}_2 \\ &= k_1'' \vec{N}_1 - k_2'' \vec{N}_2 + k_1'' \vec{N}_1 - k_2'' \vec{N}_2 \\ &= 2\left(k_1'' \vec{N}_1 - k_2'' \vec{N}_2\right) \end{aligned}$$

özdeşliği bulunur. Bu özdeşlikten

$$2\left(k_1''\vec{N}_1 - k_2''\vec{N}_2\right) = D_T\vec{N}\left(\frac{k_1''}{k_1} + \frac{k_2''}{k_2}\right)$$

sonucuna varılır ve buradan

$$k_1''\vec{N}_1 - k_2''\vec{N}_2 = D_T\vec{N}\left(\frac{k_1''}{2k_1} + \frac{k_2''}{2k_2}\right) \tag{4.60}$$

eşitliği bulunur. (4.60) eşitliğini (4.53) denkleminde yerine yazıp ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} D_T(D_T D_T\vec{N}) &= D_T\vec{N}(k_1^2 - k_2^2) + D_T\vec{N}\left(\frac{k_1''}{2k_1} + \frac{k_2''}{2k_2}\right) + 3k_1' D_T\vec{N}_1 - 3k_2' D_T\vec{N}_2 \\ &= D_T\vec{N}\left(\frac{k_1''}{2k_1} + \frac{k_2''}{2k_2} + k_1^2 - k_2^2\right) + 3k_1' D_T\vec{N}_1 - 3k_2' D_T\vec{N}_2 \end{aligned}$$

(4.51) denklemi elde edilir, böylece ispatın bir yönü tamamlanır. Tersine (4.49), (4.50) ve (4.51) denklemleri kabul edip α eğrisinin slant helis olduğunu bezer şekilde gösterilir.

4.2.2. Asli Normali Spacelike Olan Spacelike Eğrinin N-Bishop Çatısına Göre Slant Helislerin Bazı Karakterizasyonları

Tanım 4.2.2.1. $\alpha : \mathrm{I} \to \mathrm{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında birim hızlı asli normali spacelike olan spacelike eğri olsun. α spacelike eğrisinin N-Bishop çatısına göre slant helis olması için $\vec{N}_1$ birim vektörü ile $\vec{u}$ sabit doğrultu vektörü arasındaki açının sabit olması gerekir; yani

$$\forall\, s \in I \text{ için } \langle \vec{N}_1(s), \vec{u} \rangle = \mu_1 \text{ (sbt)}$$

koşulunu sağlayan α eğrisine slant helis denir.

Teorem 4.2.2.1. $\alpha : \mathrm{I} \to \mathrm{E}_1^3$ sıfırdan farklı k_1 ve k_2 N-Bishop çatısının eğriliklerine sahip birim hızlı spacelike eğridir. α eğrisi slant helis olması için gerek ve yeter şart $\forall\, s \in \mathrm{I}$ için $\dfrac{k_1}{k_2}$ oranı sabittir.

İspat. $(\Rightarrow)$: α, E_1^3 de slant helis olsun. Slant helis tanımından $\left\{\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\right\}$ N-Bishop çatısına göre $\langle \vec{N}_1, \vec{u}\rangle = \mu_1$ (sbt) eşitliği yazılabilir. Bu eşitliğin türevi alınırsa $\langle \vec{N}_1', \vec{u}\rangle = 0$ olup N-Bishop çatısının (3.8) denklemlerinden

$$\langle -k_1\vec{N}, \vec{u}\rangle = 0 \quad \text{olur buradan} \quad \langle \vec{N}, \vec{u}\rangle = 0$$

yazılır. Bulduğumuz eşitlikte tekrar türev alınırsa; yani,

$$\langle \vec{N}, \vec{u}\rangle = 0$$

ifadesinin türevi

$$\langle \vec{N}', \vec{u}\rangle = 0$$

bulunur. Bu denklemde (3.8) denklemlerini yazarsak

$$\langle k_1\vec{N}_1 - k_2\vec{N}_2, \vec{u}\rangle = 0$$

eşiti bulunur. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned} k_1\langle \vec{N}_1, \vec{u}\rangle - k_2\langle \vec{N}_2, \vec{u}\rangle &= 0 \\ k_1(\mu_1) - k_2(\mu_2) &= 0 \\ \frac{k_1}{k_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} &= \mu(sbt) \end{aligned}$$

elde edilir. $\langle \vec{N}, \vec{u}\rangle = 0$ eşitliğinden $\vec{u} \in s_p\left\{\vec{N}_1, \vec{N}_2\right\}$ yazılır ve diğer taraftan α eğrisi spacelike eğri olduğundan N-Bishop çatısının ortonormali $\left\{\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\right\}$ olup $\vec{N}$ ve $\vec{N}_1$ spacelike, $\vec{N}_2$ timelike vektörleridir. Buna göre

$$\vec{u} = (\mu_1)\vec{N}_1 + (-\mu_2)\vec{N}_2 \tag{4.61}$$

eşitliği yazılabilir. (4.61) eşitliğinde türev alınırsa

$$
\begin{aligned}
\vec{u}' &= (\mu_1)\vec{N}_1' + (-\mu_2)\vec{N}_2' \\
&= (\mu_1)(-k_1\vec{N}) + (-\mu_2)(-k_2\vec{N}) \\
&= \left[-k_1(\mu_1) + k_2(\mu_2)\right]\vec{N} = \vec{0}
\end{aligned}
$$

türevi sıfır olan bir eşitlik bulunur ve $\vec{u}$ sabittir, böylece ispat tamamlanır.

$(\Leftarrow)$: $\dfrac{k_1}{k_2} = sbt$ eşitliğini kabul edelim. Buradan $\dfrac{k_1}{k_2} = \mu$ ve μ sabit sayısına karşılık gelen $\mu = \dfrac{\mu_2}{\mu_1}$ eşitliği alınabilir. Bu denklemden

$$
\begin{aligned}
\frac{k_1}{k_2} &= \frac{\mu_2}{\mu_1} \\
k_1(\mu_1) - k_2(\mu_2) &= 0
\end{aligned}
$$

eşiti bulunur. (4.61) denkleminde türev alınırsa

$$
\begin{aligned}
\vec{u}' &= (\mu_1)\vec{N}_1' + (-\mu_2)\vec{N}_2' \\
&= (\mu_1)(-k_1\vec{N}) + (-\mu_2)(-k_2\vec{N}) \\
&= \left[-k_1(\mu_1) + k_2(\mu_2)\right]\vec{N} = \vec{0}
\end{aligned}
$$

türevi sıfır olan bir ifade bulunur ve $\vec{u}$ sabit olur. Şimdi $\langle \vec{N}_1, \vec{u} \rangle$ ifadesinin sabit olduğunu gösterelim; yani,

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{N}_1, \vec{u} \rangle &= \langle \vec{N}_1, (\mu_1)\vec{N}_1 + (-\mu_2)\vec{N}_2 \rangle \\
&= (\mu_1)\langle \vec{N}_1, \vec{N}_1 \rangle + (-\mu_2)\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle \\
&= (\mu_1)\underbrace{\langle \vec{N}_1, \vec{N}_1 \rangle}_{1} + (-\mu_2)\underbrace{\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle}_{0} \\
&= \mu_1(sbt)
\end{aligned}
$$

eşitliği bulunur, buradan slant helis tanımından α eğrisi slant helis olup ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.2.2. $\alpha : \mathrm{I} \to \mathrm{E}_1^3$ sıfırdan farklı k_1 ve k_2 N-Bishop çatısının eğriliklerine sahip birim hızlı spacelike eğridir. α slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\det\left(\vec{N}_1', \vec{N}_1'', \vec{N}_1'''\right) = 0$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $(\Rightarrow)$: α slant helis olsun. (3.8) denklemlerinden

$$\vec{N}_1' = -k_1\vec{N} \tag{4.62}$$

denkleminin türevi alınıp (3.8) denklemlerini yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılırsa; yani,

$$\begin{aligned} \vec{N}_1'' &= -k_1'\vec{N} - k_1\vec{N}' \\ &= -k_1'\vec{N} - k_1(k_1\vec{N}_1 - k_2\vec{N}_2) \\ &= k_1'\vec{N} - k_1^{\,2}\vec{N}_1 + k_1k_2\vec{N}_2 \end{aligned} \tag{4.63}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikte tekrar türev alınır (3.8) denklemlerini yerine yazılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa; yani,

$$\begin{aligned} \vec{N}_1''' &= -2k_1k_1'\vec{N}_1 - k_1^{\,2}\vec{N}_1' + k_1''\vec{N} + k_1'\vec{N}' + k_1'k_2\vec{N}_2 + k_2'k_1\vec{N}_2 + k_1k_2\vec{N}_2' \\ &= -2k_1k_1'\vec{N}_1 - k_1^{\,2}(-k_1\vec{N}) + k_1''\vec{N} + k_1'(k_1\vec{N}_1 - k_2\vec{N}_2) + k_1'k_2\vec{N}_2 + k_2'k_1\vec{N}_2 + k_1k_2(-k_2\vec{N}) \\ &= (k_1^{\,3} + k_1'' - k_1k_2^{\,2})\vec{N} + (-k_1k_1')\vec{N}_1 + (k_2'k_1)\vec{N}_2 \end{aligned} \tag{4.64}$$

ifadesi bulunur. (4.62), (4.63) ve (4.64) eşitliklerini $\det\left(\vec{N}_1', \vec{N}_1'', \vec{N}_1'''\right)$ determinant ifadesinde yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılır; yani,

$$\begin{aligned} \det\left(\vec{N}_1', \vec{N}_1'', \vec{N}_1'''\right) &= \begin{vmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1' & -k_1^{\,2} & k_1k_2 \\ k_1^{\,3} + k_1'' - k_1k_2^{\,2} & -k_1k_1' & k_2'k_1 \end{vmatrix} \\ &= -k_1\left[-k_2'k_1^{\,3} + k_1^{\,2}k_2k_1'\right] \\ &= -k_1^3\left[k_2k_1' - k_2'k_1\right] \\ &= -k_1^3k_2^{\,2}\left[\frac{k_1}{k_2}\right]' \end{aligned} \tag{4.65}$$

eşitliği bulunur. α slant helis olduğundan $\dfrac{k_1}{k_2}$ sabittir. Sabitin türevi sıfır olup

$$\left[\frac{k_1}{k_2}\right]' = 0 \tag{4.66}$$

olur. (4.66) denklemini (4.65) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\det\left(\vec{N}_1', \vec{N}_1'', \vec{N}_1'''\right) = 0$$

determinantı bulunur.

$(\Leftarrow)$: $\det\left(\vec{N}_1', \vec{N}_1'', \vec{N}_1'''\right) = 0$ eşitliğini kabul edelim. (4.65) eşitliğinden

$$k_1^{\,3} k_2^{\,2}\left[\frac{k_1}{k_2}\right]' = 0 \text{ olup buradan } \left[\frac{k_1}{k_2}\right]' = 0\ ,\ k_2 \neq 0, k_1 \neq 0$$

eşitliği elde edilir. Buradan türevi sıfır olan $\frac{k_1}{k_2}$ oranı sabit olup α bir slant helistir, böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.2.3. $\alpha : \mathrm{I} \to \mathrm{E}_1^3$ sıfırdan farklı k_1 ve k_2 N-Bishop çatısının eğriliklerine sahip birim hızlı spacelike eğridir. α slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\det\left(\vec{N}_2', \vec{N}_2'', \vec{N}_2'''\right) = 0$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $(\Rightarrow)$: α slant helis olsun. (3.8) denklemlerinden $\vec{N}_2' = -k_2\vec{N}$ denkleminin türevini alıp (3.8) denklemlerini yerine yazılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\vec{N}_2'' &= -k_2{}'\vec{N} - k_2\vec{N}' \\ &= -k_2{}'\vec{N} - k_2\left(k_1\vec{N}_1 - k_2\vec{N}_2\right) \\ &= -k_2{}'\vec{N} - k_1k_2\vec{N}_1 + k_2{}^2\vec{N}_2\end{aligned} \tag{4.67}$$

ifadesi bulunur. (4.67) denkleminde tekrar türev alıp (3.8) denklemlerini yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\begin{aligned}
\vec{N}_2''' &= -k_1'k_2\vec{N}_1 - k_1k_2'\vec{N}_1 - k_1k_2\vec{N}_1' - k_2''\vec{N} - k_2'\vec{N}' + 2k_2k_2'\vec{N}_2 + k_2^2\vec{N}_2' \\
&= -k_1'k_2\vec{N}_1 - k_1k_2'\vec{N}_1 - k_1k_2(-k_1\vec{N}) - k_2''\vec{N} - k_2'(k_1\vec{N}_1 - k_2\vec{N}_2) + 2k_2k_2'\vec{N}_2 + k_2^2(-k_2\vec{N}) \\
&= (-k_2^3 - k_2'' + k_2k_1^2)\vec{N} + (-2k_1k_2' - k_2k_1')\vec{N}_1 + (3k_2k_2')\vec{N}_2
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Şimdi $\det\left(\vec{N}_2', \vec{N}_2'', \vec{N}_2'''\right)$ ifadesini hesaplamak için bulduğumuz eşitlikleri determinant denkleminde yerine yazarak gerekli hesaplamalar yapılır; yani,

$$\begin{aligned}
\det\left(\vec{N}_2', \vec{N}_2'', \vec{N}_2'''\right) &= \begin{vmatrix} -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2' & -k_1k_2 & k_2^2 \\ -k_2^3 - k_2'' + k_2k_1^2 & -2k_1k_2' - k_2k_1' & 3k_2k_2' \end{vmatrix} \\
&= -k_2(-3k_1k_2^2k_2' + 2k_1k_2^2k_2' + k_2^3k_1') \\
&= -k_2(k_2^3k_1' - k_1k_2^2k_2') \\
&= -k_2^3(k_2k_1' - k_1k_2') \\
&= -k_2^5\left[\frac{k_1}{k_2}\right]'
\end{aligned} \tag{4.68}$$

eşitliği bulunur. α slant helis olduğundan $\dfrac{k_1}{k_2}$ sabit olup $\left[\dfrac{k_1}{k_2}\right]' = 0$ eşitliği bulunur. (4.68) eşitliğinden

$$\det\left(\vec{N}_2', \vec{N}_2'', \vec{N}_2'''\right) = 0$$

elde edilir.

$(\Leftarrow)$: $\det\left(\vec{N}_2', \vec{N}_2'', \vec{N}_2'''\right) = 0$ eşitliğini kabul edelim. Bu durumda (4.68) eşitliğinden

$$-k_2^5\left[\frac{k_1}{k_2}\right]' = 0 \quad , \; k_2 \neq 0$$

eşitliği elde eddilir ki buradan $\left[\frac{k_1}{k_2}\right]' = 0$ olduğu görülür ve $\frac{k_1}{k_2}$ oranı sabit olur. O halde α bir slant helis olup ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.2.4. $\alpha : \mathrm{I} \to \mathrm{E}_1^3$ sıfırdan farklı k_1 ve k_2 N-Bishop çatı eğriliklerine sahip birim hızlı spacelike eğridir. α slant helis olması için gerek ve yeter şart $\det\left(\vec{N}', \vec{N}'', \vec{N}'''\right) = 0$ eşitliği sağlanır.

İspat. $(\Rightarrow)$: α slant helis olsun. Bu durumda $\frac{k_1}{k_2}$ sabittir. (3.8) denklemlerinden

$$\vec{N}' = k_1\vec{N}_1 - k_2\vec{N}_2 \tag{4.69}$$

eşitliğin türevi alındıktan sonra (3.8) denklemlerini yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılır; yani,

$$\begin{aligned}
\vec{N}' &= k_1\vec{N}_1 - k_2\vec{N}_2 \\
\vec{N}'' &= k_1'\vec{N}_1 + k_1\vec{N}_1' - k_2'\vec{N}_2 - k_2\vec{N}_2' \\
&= k_1'\vec{N}_1 + k_1(-k_1\vec{N}) - k_2'\vec{N}_2 - k_2(-k_2\vec{N}) \\
&= (k_2^2 - k_1^2)\vec{N} + k_1'\vec{N}_1 - k_2'\vec{N}_2
\end{aligned} \tag{4.70}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte tekrar türev alınarak (3.8) denklemlerini yerini yazıp gerekli düzenlemeler yapılır; yani,

$$\begin{aligned}
\vec{N}''' &= (2k_2k_2' - 2k_1k_1')\vec{N} + (k_2^2 - k_1^2)\vec{N}' + k_1''\vec{N}_1 + k_1'\vec{N}_1' - k_2''\vec{N}_2 - k_2'\vec{N}_2' \\
&= (2k_2k_2' - 2k_1k_1')\vec{N} + (k_2^2 - k_1^2)(k_1\vec{N}_1 - k_2\vec{N}_2) + k_1''\vec{N}_1 + k_1'(-k_1\vec{N}) - k_2''\vec{N}_2 - k_2'(-k_2\vec{N}) \\
&= (3k_2k_2' - 3k_1k_1')\vec{N} + (k_1'' - k_1^3 + k_1k_2^2)\vec{N}_1 + (-k_2'' + k_1^2k_2 - k_2^3)\vec{N}_2
\end{aligned} \tag{4.71}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi $\det\left(\vec{N}', \vec{N}'', \vec{N}'''\right)$ ifadesini hesaplamak için determinant eşitliğinde (4.69), (4.70) ve (4.71) eşitlikleri yerine yazıp gerekli hesaplamalar düzenlemeler yapılır; yani,

$$\det\left(\vec{N}', \vec{N}'', \vec{N}'''\right) = \begin{vmatrix} 0 & k_1 & -k_2 \\ (k_2^2 - k_1^2) & k_1' & -k_2' \\ (3k_2k_2' - 3k_1k_1') & (k_1'' - k_1^3 + k_1k_2^2) & (-k_2'' + k_1^2k_2 - k_2^3) \end{vmatrix}$$

$$= -k_1\left[(k_2^2 - k_1^2)(-k_2'' + k_1^2k_2 - k_2^3) - 3k_1k_1'k_2' + 3k_2k_2'^2\right]$$

$$-k_2\left[(k_2^2 - k_1^2)(k_1'' - k_1^3 + k_1k_2^2) + 3k_1k_1'^2 - 3k_2k_2'k_1'\right]$$

$$= \left(3k_2^3k_2' - 3k_1k_2^2k_1'\right)\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' + \left(k_2^2 - k_1^2\right)\left[k_1k_2'' - k_2k_1''\right]$$

$$= \left(3k_1k_2^2k_1' - 3k_2^3k_2'\right)\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' + \left[\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 - 1\right]\left[\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'' k_2^4 + 2k_2^3k_2'\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right] \qquad (4.72)$$

eşitliği bulunur. α slant helis olduğundan $\frac{k_1}{k_2}$ sabittir. Buradan $\left[\frac{k_1}{k_2}\right]' = 0$ olup (4.72) denkleminden $\det\left(\vec{N}', \vec{N}'', \vec{N}'''\right) = 0$ olur ki ispatın bir yönü tamamlanır.

$(\Leftarrow)$: $\det\left(\vec{N}', \vec{N}'', \vec{N}'''\right) = 0$ eşitini kabul edelim. Bu durumda (4.72) denkleminden $\left[\frac{k_1}{k_2}\right]' = 0$ olur ve buradan $\frac{k_1}{k_2}$ sabittir. O halde α slant helis olup ispat tamamlanır.

Minkowski 3-uzayında alınan bir α spacelike eğrisi slant helis olsun. O zaman N-Bishop çatısının $\alpha'(s) = T$ vektörüne göre kovaryant türev

$$\begin{aligned} D_T\vec{N} &= k_1\vec{N}_1 - k_2\vec{N}_2 \\ D_T\vec{N}_1 &= -k_1\vec{N} \\ D_T\vec{N}_2 &= -k_2\vec{N} \end{aligned} \qquad (4.73)$$

denklemleri yazılır. Herhangi $s \in \mathrm{I}$ için $N_1(s)$ ve $N_2(s)$ vektör alanları olup k_1 ve k_2 eğrilikleri s parametreli fonksiyonlardır.

Teorem 4.2.2.5. Minkowski 3-uzayında alınan birim hızlı bir spacelike α eğrisinin bir slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$D_T(D_T D_T \vec{N}_1) = D_T \vec{N}_1 \left(\frac{k_1''}{k_1} + k_2^2 - k_1^2\right) - 3k_1' D_T \vec{N} \tag{4.74}$$

eşitliği sağlar.

İspat. $(\Rightarrow)$: Farz edelim ki α slant helis olsun. (4.74) eşitliğini ispatlamak için öncelikle (4.73) eşitliklerinden $D_T \vec{N}_1 = -k_1 \vec{N}$ eşitliğin kovaryant türevini alıp (4.73) eşitlikleri yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılır; yani,

$$\begin{aligned} D_T(D_T \vec{N}_1) &= D_T(-k_1 \vec{N}) \\ &= -k_1' \vec{N} - k_1 D_T \vec{N} \\ &= -k_1' \vec{N} - k_1(k_1 \vec{N}_1 - k_2 \vec{N}_2) \\ &= -k_1' \vec{N} - k_1^2 \vec{N}_1 + k_1 k_2 \vec{N}_2 \end{aligned} \tag{4.75}$$

eşitliği bulunur. (4.75) eşitliğin kovaryant türevini aldıktan sonra (4.73) eşitlikleri yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılır; yani,

$$\begin{aligned} D_T(D_T D_T \vec{N}_1) &= D_T(-k_1' \vec{N} - k_1^2 \vec{N}_1 + k_1 k_2 \vec{N}_2) \\ &= -k_1'' \vec{N} - k_1' D_T \vec{N} - 2k_1 k_1' \vec{N}_1 - k_1^2 D_T \vec{N}_1 + (k_1' k_2 + k_1 k_2') \vec{N}_2 + k_1 k_2 D_T \vec{N}_2 \\ &= -k_1'' \vec{N} - k_1' D_T \vec{N} - 2k_1 k_1' \vec{N}_1 + (k_1' k_2 + k_1 k_2') \vec{N}_2 + k_1 k_2 (-k_2 \vec{N}) - k_1^2 D_T \vec{N}_1 \end{aligned} \tag{4.76}$$

eşitliği bulunur. α slant helis olduğundan $\dfrac{k_1}{k_2} = sbt$ yazılır. Bu eşitliğin türevini alırsak

$$\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikte türev hesaplaması yapıp gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\begin{aligned} \frac{k_1' k_2 - k_1 k_2'}{k_2^2} &= 0 \\ k_1' k_2 - k_1 k_2' &= 0 \\ k_1' k_2 &= k_1 k_2' \end{aligned} \tag{4.77}$$

ifadesi bulunur. Ayrıca (4.73) eşitliklerinden

$$N = \frac{-1}{k_1} D_T \vec{N}_1 \tag{4.78}$$

eşitliği yazılabilir. Şimdi (4.77) ve (4.78) ifadelerini kullanarak (4.76) denkleminde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılır; yani,

$$\begin{aligned}
D_T(D_T D_T \vec{N}_1) &= -k_1'' \vec{N} - k_1 k_2^2 \vec{N} - k_1' D_T \vec{N} - 2k_1' \left(\underbrace{k_1 \vec{N}_1 - k_2 \vec{N}_2}_{D_T N} \right) - k_1^2 D_T \vec{N}_1 \\
&= (-k_1'' - k_1 k_2^2) \vec{N} - k_1^2 D_T \vec{N}_1 - 3k_1' D_T \vec{N} \\
&= (-k_1'' - k_1 k_2^2)\left(\frac{-1}{k_1} D_T \vec{N}_1\right) - k_1^2 D_T \vec{N}_1 - 3k_1' D_T \vec{N} \\
&= D_T \vec{N}_1 \left(\frac{k_1''}{k_1} + k_2^2 - k_1^2\right) - 3k_1' D_T \vec{N}
\end{aligned}$$

(4.74) eşitliği elde edilir ve ispatın bir yönü tamamlanır.

$(\Leftarrow)$: Tersine (4.74) denklemin doğru olduğunu kabul edelim. Bu durumda α eğrisinin slant helis olduğunu göstermeye çalışalım. Bunun için (4.78) denklemin kovaryant türevini alarak

$$\begin{aligned}
D_T \vec{N} &= D_T \left(\frac{-1}{k_1} D_T \vec{N}_1 \right) \\
&= \frac{k_1'}{k_1^2} D_T \vec{N}_1 - \frac{1}{k_1} D_T D_T \vec{N}_1
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikte tekrar kovaryant türev alarak gerekli düzenlemeler yapılır; yani,

$$\begin{aligned}
D_T D_T \vec{N} &= D_T \left(\frac{k_1'}{k_1^2} D_T \vec{N}_1 - \frac{1}{k_1} D_T D_T \vec{N}_1 \right) \\
&= \left(\frac{k_1'}{k_1^2} \right)' D_T \vec{N}_1 + \frac{k_1'}{k_1^2} D_T D_T \vec{N}_1 + \frac{k_1'}{k_1^2} D_T D_T \vec{N}_1 - \frac{1}{k_1} D_T D_T D_T \vec{N}_1
\end{aligned} \tag{4.79}$$

eşitliği bulunur. (4.79) denkleminde (4.74) denklemi yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılarak

$$
\begin{aligned}
D_T D_T N &= \left(\frac{k_1'}{k_1^2}\right)' D_T N_1 + \frac{k_1'}{k_1^2} D_T D_T N_1 + \frac{k_1'}{k_1^2} D_T D_T N_1 - \frac{1}{k_1}\left(D_T \vec{N}_1 \left(\frac{k_1''}{k_1} + k_2^2 - k_1^{\,2}\right) - 3k_1{}' D_T N \right) \\
&= \left(\frac{k_1'}{k_1^2}\right)' D_T N_1 + \frac{k_1'}{k_1^2} D_T D_T N_1 + \frac{k_1'}{k_1^2} D_T D_T N_1 + D_T N_1 \left(-\frac{k_1''}{k_1^2} - \frac{k_2^2}{k_1} + k_1 \right) + \frac{3k_1'}{k_1} D_T N \\
&= \left(\left(\frac{k_1'}{k_1^2}\right)' - \frac{k_1''}{k_1^2} - \frac{k_2^2}{k_1} + k_1 \right) D_T N_1 + \frac{2k_1'}{k_1^2} D_T D_T N_1 + \frac{3k_1'}{k_1} D_T N
\end{aligned}
$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde (4.75) ve (4.73) denklemleri yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılır; yani,

$$
\begin{aligned}
D_T D_T \vec{N} &= \left(\left(\frac{k_1'}{k_1^2}\right)' - \frac{k_1''}{k_1^2} - \frac{k_2^2}{k_1} + k_1 \right) D_T \vec{N}_1 + \frac{2k_1'}{k_1^2}\left(-k_1{}' \vec{N} - k_1{}^2 \vec{N}_1 + k_1 k_2 \vec{N}_2 \right) + \frac{3k_1'}{k_1} D_T \vec{N} \\
&= \left(\left(\frac{k_1'}{k_1^2}\right)' - \frac{k_1''}{k_1^2} - \frac{k_2^2}{k_1} + k_1 \right) D_T \vec{N}_1 - \frac{2(k_1')^2}{k_1^2} \vec{N} - 2k_1' \vec{N}_1 + \frac{2k_1' k_2}{k_1} \vec{N}_2 + \frac{3k_1'}{k_1}\left(k_1 \vec{N}_1 - k_2 \vec{N}_2 \right) \\
&= \left(\left(\frac{k_1'}{k_1^2}\right)' - \frac{k_1''}{k_1^2} - \frac{k_2^2}{k_1} + k_1 \right) D_T \vec{N}_1 + k_1' \vec{N}_1 - \frac{k_1' k_2}{k_1} \vec{N}_2 - \frac{2(k_1')^2}{k_1^2} \vec{N} \qquad (4.80)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir ve diğer yandan $D_T D_T N$ ifadesini hesaplamak için (4.73) denklemlerin tekrar kovaryant türevini alarak bulunabilir; yani,

$$
\begin{aligned}
D_T D_T \vec{N} &= D_T \left(k_1 \vec{N}_1 - k_2 \vec{N}_2 \right) \\
&= k_1' \vec{N}_1 + k_1 D_T \vec{N}_1 - k_2' \vec{N}_2 - k_2 D_T \vec{N}_2 \\
&= k_1' \vec{N}_1 + k_1 D_T \vec{N}_1 - k_2' \vec{N}_2 - k_2^2 \vec{N} \qquad (4.81)
\end{aligned}
$$

denklemi bulunur. Şimdi (4.80) ve (4.81) eşitliklerini eşitleyerek

$$
\frac{k_1' k_2}{k_1} = k_2'
$$

eşitliği yazılır. Bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılır; yani,

$$\frac{k_1'}{k_1} = \frac{k_2'}{k_2}$$
$$k_2 k_1' = k_1 k_2'$$
$$k_2 k_1' - k_1 k_2' = 0$$
$$\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' = 0$$

eşitliği elde edilir. Oranın türevi sıfır olduğuna göre $\frac{k_1}{k_2} = sbt$ eşitliği yazılır ve buradan α bir slant helistir.

Teorem 4.2.2.6. Minkowski 3-uzayında alınan birim hızlı bir spacelike α eğrisinin bir slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$D_T(D_T D_T \vec{N}_2) = D_T \vec{N}_2 \left(\frac{k_2''}{k_2} + k_2^2 - k_1^{\,2}\right) - 3k_2' D_T \vec{N} \tag{4.82}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Kabul edelim ki α bir slant helistir. (4.82) denklemini ispatlamak için (4.73) denklemlerinden $D_T \vec{N}_2 = -k_2 \vec{N}$ eşitliğin kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned} D_T(D_T \vec{N}_2) &= D_T(-k_2 \vec{N}) \\ &= -k_2' \vec{N} - k_2 D_T \vec{N} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte (4.73) denklemleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} D_T D_T \vec{N}_2 &= -k_2' \vec{N} - k_2(k_1 \vec{N}_1 - k_2 \vec{N}_2) \\ &= -k_2' \vec{N} - k_1 k_2 \vec{N}_1 + k_2^2 \vec{N}_2 \end{aligned}$$

ifadesi elde edillir. Bu eşitlikte tekrar kovaryant türev alıp

$$\begin{aligned} D_T(D_T D_T \vec{N}_2) &= D_T(-k_2' \vec{N} - k_1 k_2 \vec{N}_1 + k_2^2 \vec{N}_2) \\ &= -k_2'' \vec{N} - k_2' D_T \vec{N} + 2k_2 k_2' \vec{N}_2 + k_2^2 D_T \vec{N}_2 - (k_1' k_2 + k_1 k_2') \vec{N}_1 - k_1 k_2 D_T \vec{N}_1 \end{aligned}$$

(4.73) eşitliği yerine yazılırsa

$$D_T(D_T D_T \vec{N}_2) = -k_2'' \vec{N} - k_2' D_T \vec{N} + 2k_2 k_2' \vec{N}_2 - (k_1' k_2 + k_1 k_2') \vec{N}_1 - k_1 k_2 (-k_1 \vec{N}) + k_2^2 D_T \vec{N}_2 \qquad (4.83)$$

eşitliği bulunur. α slant helis olduğundan $\dfrac{k_1}{k_2} = sbt$ yazılır. Bu eşitlikten dolayı (4.77) eşitliği (4.83) denkleminde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} D_T(D_T D_T \vec{N}_2) &= -k_2'' \vec{N} + k_1^2 k_2 \vec{N} - k_2' D_T \vec{N} - 2k_2' \underbrace{(k_1 \vec{N}_1 - k_2 \vec{N}_2)}_{D_T N} + k_2^2 D_T \vec{N}_2 \\ &= (-k_2'' + k_1^2 k_2) \vec{N} + k_2^2 D_T \vec{N}_2 - 3k_2' D_T \vec{N} \qquad (4.84) \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. (4.73) denklemlerinden

$$N = \frac{-1}{k_2} D_T \vec{N}_2$$

eşitliği yazılabilir ve bu eşitlik (4.84) de yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} D_T(D_T D_T \vec{N}_2) &= (-k_2'' + k_1^2 k_2)\left(\frac{-1}{k_2} D_T \vec{N}_2\right) + k_2^2 D_T \vec{N}_2 - 3k_2' D_T \vec{N} \\ &= D_T \vec{N}_2 \left(\frac{k_2''}{k_2} + k_2^2 - k_1^2\right) - 3k_2' D_T \vec{N} \end{aligned}$$

(4.82) eşitliği bulunmuş olup ispatın bir yönü ispatlanmış olur. Tersine (4.82) denklemini doğru kabul edip α eğrisinin slant helis olduğunu bezer şekilde gösterilir.

Teorem 4.2.2.7. Minkowski 3-uzayında alınan birim hızlı bir spacelike α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart

i. $$D_T(D_T D_T \vec{N}) = D_T \vec{N} \left(\frac{k_1''}{k_1} + k_1^2 - k_2^2 \right) - k_1' D_T \vec{N}_1 + k_2' D_T \vec{N}_2 \qquad (4.85)$$

ii. $$D_T(D_T D_T \vec{N}) = D_T \vec{N} \left(\frac{k_2''}{k_2} + k_1^2 - k_2^2 \right) - k_1' D_T \vec{N}_1 + k_2' D_T \vec{N}_2 \qquad (4.86)$$

iii. $$D_T(D_T D_T \vec{N}) = D_T \vec{N} \left(\frac{k_1''}{2k_1} + \frac{k_2''}{2k_2} + k_1^2 - k_2^2 \right) - k_1' D_T \vec{N}_1 + k_2' D_T \vec{N}_2 \qquad (4.87)$$

i, ii, iii durumlardan birini sağlar.

İspat Kabul edelim ki α bir slant helistir. (4.85), (4.86) ve (4.87) eşitliklerini göstermek için (4.73) denklemlerinden $D_T\vec{N} = k_1\vec{N}_1 - k_2\vec{N}_2$ eşitliğin kovaryant türevi alınıp gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\begin{aligned} D_T(D_T\vec{N}) &= D_T(k_1\vec{N}_1 - k_2\vec{N}_2) \\ &= k_1'\vec{N}_1 + k_1 D_T\vec{N}_1 - k_2'\vec{N}_2 - k_2 D_T\vec{N}_2 \\ &= k_1^2\vec{N} - k_2^2\vec{N} + k_1'\vec{N}_1 - k_2'\vec{N}_2 \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikte tekrar kovaryant türev alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} D_T(D_T D_T\vec{N}) &= D_T(k_1^2\vec{N} - k_2^2\vec{N} + k_1'\vec{N}_1 - k_2'\vec{N}_2) \\ &= 2k_1k_1'\vec{N} + k_1^2 D_T\vec{N} - 2k_2k_2'\vec{N} - k_2^2 D_T\vec{N} + k_1''\vec{N}_1 + k_1' D_T\vec{N}_1 - k_2''\vec{N}_2 - k_2' D_T\vec{N}_2 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte (4.73) denklemlerini tatbik edip gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} D_T(D_T D_T\vec{N}) &= -2k_1' D_T\vec{N}_1 + 2k_2' D_T\vec{N}_2 + k_1^2 D_T\vec{N} - k_2^2 D_T\vec{N} + k_1''\vec{N}_1 - k_2''\vec{N}_2 + k_1' D_T\vec{N}_1 - k_2' D_T\vec{N}_2 \\ &= -k_1' D_T\vec{N}_1 + k_2' D_T\vec{N}_2 + D_T\vec{N}(k_1^2 - k_2^2) + k_1''\vec{N}_1 - k_2''\vec{N}_2 \end{aligned} \tag{4.88}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi ise $k_1''\vec{N}_1 - k_2''\vec{N}_2$ ifadesinin özdeşliğini bulmaya çalışalım. Bunun için α eğrisi slant helis olduğundan $\frac{k_1}{k_2} = sbt$ yazılabilir. Bu eşitlikte türev alınırsa

$$\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' = 0$$

eşitliği bulunur. Burada bölüm türevi uygulanırsa

$$\begin{aligned} \frac{k_1'k_2 - k_1k_2'}{k_2^2} &= 0 \\ k_1'k_2 - k_1k_2' &= 0 \\ k_1'k_2 &= k_1k_2' \end{aligned} \tag{4.89}$$

eşitliği elde edilir. (4.89) eşitliğinden

$$\frac{k_1'}{k_2'} = \frac{k_1}{k_2} \tag{4.90}$$

yazılabilir. Burada $\frac{k_1}{k_2} = sbt$ olduğundan $\frac{k_1'}{k_2'} = sbt$ olduğu açıktır. Burada tekrar bölüm türevi uygularsak

$$\begin{aligned} \frac{k_1''k_2' - k_1'k_2''}{k_2'^2} &= 0 \\ k_1''k_2' - k_1'k_2'' &= 0 \\ k_1''k_2' &= k_1'k_2'' \\ \frac{k_1''}{k_2''} &= \frac{k_1'}{k_2'} \end{aligned} \tag{4.91}$$

eşitliği elde edilir. (4.90) ve (4.91) eşitlikleri göz önüne alarak

$$\frac{k_1''}{k_2''} = \frac{k_1'}{k_2'} = \frac{k_1}{k_2}$$

ifadesi yazılır. Buradan

$$\frac{k_1''}{k_2''} = \frac{k_1}{k_2}$$

$$k_1''k_2 = k_1k_2'' \tag{4.92}$$

olur. Bu eşitlikten $\frac{k_1''}{k_1} = \frac{k_2''}{k_2} = a$ eşitliğini yazıp $\frac{k_1''}{k_1} = a$ ve $\frac{k_2''}{k_2} = a$ eşitliklerini $k_1''\vec{N}_1 - k_2''\vec{N}_2$ ifadesinde kullanarak özdeşliklerini bulalım; yani,

$$\begin{aligned} k_1''\vec{N}_1 - k_2''\vec{N}_2 &= \frac{k_1''}{k_1}k_1\vec{N}_1 - \frac{k_2''}{k_2}k_2\vec{N}_2 \\ &= ak_1\vec{N}_1 - ak_2\vec{N}_2 \\ &= a(k_1\vec{N}_1 - k_2\vec{N}_2) \\ &= aD_T\vec{N} \end{aligned}$$

$$k_1''\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2 = \frac{k_1''}{k_1}D_T\vec{N} \quad \text{veya} \quad k_1''\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2 = \frac{k_2''}{k_2}D_T\vec{N} \tag{4.93}$$

eşitliklerini yazabiliriz. (4.93) eşitliklerini (4.88) denkleminde yerine ayrı ayrı yazıp gerekli düzenlemeler yaparak

$$\begin{aligned} D_T(D_T D_T \vec{N}) &= D_T \vec{N}(k_1^2 - k_2^2) + \frac{k_1''}{k_1} D_T \vec{N} - k_1' D_T \vec{N}_1 + k_2' D_T \vec{N}_2 \\ &= D_T \vec{N}\left(\frac{k_1''}{k_1} + k_1^2 - k_2^2\right) - k_1' D_T \vec{N}_1 + k_2' D_T \vec{N}_2 \end{aligned}$$

(4.85) eşitliği bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} D_T(D_T D_T N) &= D_T \vec{N}(k_1^2 - k_2^2) + \frac{k_2''}{k_2} D_T N - k_1' D_T \vec{N}_1 + k_2' D_T \vec{N}_2 \\ &= D_T \vec{N}\left(\frac{k_2''}{k_2} + k_1^2 - k_2^2\right) - k_1' D_T \vec{N}_1 + k_2' D_T \vec{N}_2 \end{aligned}$$

(4.86) eşitliği de bulunur. (4.87) eşitliğini göstermek için

$$D_T \vec{N}\left(\frac{k_1''}{k_1} + \frac{k_2''}{k_2}\right)$$

eşitini bulmaya çalışalım; yani,

$$\begin{aligned} D_T \vec{N}\left(\frac{k_1''}{k_1} + \frac{k_2''}{k_2}\right) &= \left(k_1 \vec{N}_1 - k_2 \vec{N}_2\right)\left(\frac{k_1''}{k_1} + \frac{k_2''}{k_2}\right) \\ &= k_1'' \vec{N}_1 - k_2'' \vec{N}_2 + \frac{k_1 k_2''}{k_2} \vec{N}_1 - \frac{k_1'' k_2}{k_1} \vec{N}_2 \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikte (4.92) eşitliği yerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} D_T \vec{N}\left(\frac{k_1''}{k_1} + \frac{k_2''}{k_2}\right) &= k_1'' \vec{N}_1 - k_2'' \vec{N}_2 + \frac{k_1'' k_2}{k_2} \vec{N}_1 - \frac{k_1 k_2''}{k_1} \vec{N}_2 \\ &= k_1'' \vec{N}_1 - k_2'' \vec{N}_2 + k_1'' \vec{N}_1 - k_2'' \vec{N}_2 \\ &= 2\left(k_1'' \vec{N}_1 - k_2'' \vec{N}_2\right) \end{aligned}$$

ifadesi bulunur. Bu eşitlikten

$$2\left(k_1''\vec{N}_1 - k_2''\vec{N}_2\right) = D_T\vec{N}\left(\frac{k_1''}{k_1} + \frac{k_2''}{k_2}\right)$$

$$k_1''\vec{N}_1 - k_2''\vec{N}_2 = D_T\vec{N}\left(\frac{k_1''}{2k_1} + \frac{k_2''}{2k_2}\right)$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlik (4.88) denkleminde yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\begin{aligned} D_T(D_T D_T\vec{N}) &= D_T\vec{N}(k_1^2 - k_2^2) + D_T\vec{N}\left(\frac{k_1''}{2k_1} + \frac{k_2''}{2k_2}\right) - k_1' D_T\vec{N}_1 + k_2' D_T\vec{N}_2 \\ &= D_T\vec{N}\left(\frac{k_1''}{2k_1} + \frac{k_2''}{2k_2} + k_1^2 - k_2^2\right) - k_1' D_T\vec{N}_1 + k_2' D_T\vec{N}_2 \end{aligned}$$

(4.87) eşitliği elde edilir. Böylece ispatın bir yönü tamamlanır. Tersine (4.85), (4.86) ve (4.87) denklemlerini doğru kabul edip α eğrisinin slant helis olduğunu benzer şekilde gösterilir.

4.2.3. Binormali Spacelike olan Spacelike Eğrinin N-Bishop Çatısına Göre Slant Helislerin Karakterizasyonları

Tanım 4.2.2.1. $\alpha : \mathrm{I} \to \mathrm{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında birim hızlı binormali spacelike olan spacelike eğri olsun. α spacelike eğrisinin N-Bishop çatısına göre slant helis olması için $\vec{N}_1$ birim vektörü ile $\vec{u}$ sabit doğrultu vektörü arasındaki açının sabit olması gerekir; yani

$$\forall s \in I \text{ için } \langle \vec{N}_1(s), \vec{u} \rangle = \eta_1 (\text{sbt})$$

koşulunu sağlayan α eğrisine slant helis denir.

Teorem 4.2.3.1. $\alpha : \mathrm{I} \to \mathrm{E}_1^3$ sıfırdan farklı k_1 ve k_2 N-Bishop çatının eğriliklerine sahip birim hızlı binormali spacelike olan spacelike eğridir. α eğrisi slant helis olması için gerek ve yeter şart $\forall s \in \mathrm{I}$ için $\dfrac{k_1}{k_2}$ oranı sabittir.

İspat. $(\Rightarrow)$: α, E_1^3 de slant helis olsun. Slant helis tanımından $\left\{\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\right\}$ N-Bishop çatısına göre $\langle \vec{N}_1, \vec{u} \rangle = \eta_1(\text{sbt})$ eşitliği yazılabilir. $\langle \vec{N}_1, \vec{u} \rangle = \eta_1$ eşitliğinde türev alınırsa $\langle \vec{N}_1', \vec{u} \rangle = 0$ olup N-Bishop çatısının (3.9) denklemlerinden

$$\langle k_1\vec{N},\vec{u}\rangle = 0 \text{ olur buradan } \langle \vec{N},\vec{u}\rangle = 0$$

yazılır. Bulduğumuz eşitlikte tekrar türev alınırsa; yani, $\langle \vec{N},\vec{u}\rangle = 0$ ifadesinin türevi

$$\langle \vec{N}',\vec{u}\rangle = 0$$

bulunur. Bu eşitlikte (3.9) denklemlerini yerine yazarsak

$$\langle k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2,\vec{u}\rangle = 0$$

eşiti bulunur. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned} k_1\langle \vec{N}_1,\vec{u}\rangle + k_2\langle \vec{N}_2,\vec{u}\rangle &= 0 \\ k_1(\eta_1) + k_2(\eta_2) &= 0 \\ \frac{k_1}{k_2} &= -\frac{\eta_2}{\eta_1}\ (sbt) \end{aligned}$$

elde edilir. $\langle \vec{N},\vec{u}\rangle = 0$ eşitliğinden $\vec{u} \in s_p\left\{\vec{N}_1,\vec{N}_2\right\}$ olup burada α eğrisi spacelike olduğundan N-Bishop çatısı ortonormal $\left\{\vec{N},\vec{N}_1,\vec{N}_2\right\}$ olup $\vec{N}$ timelike, $\vec{N}_1$ ve $\vec{N}_2$ spacelike vektörlerdir. Buna göre

$$\vec{u} = (\eta_1)\vec{N}_1 + (\eta_2)\vec{N}_2 \tag{4.94}$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlikte türev alınırsa

$$\begin{aligned} \vec{u}' &= (\eta_1)\vec{N}_1' + (\eta_2)\vec{N}_2' \\ &= (\eta_1)(k_1\vec{N}) + (\eta_2)(k_2\vec{N}) \\ &= \left[k_1(\eta_1) + k_2(\eta_2)\right]\vec{N} = \vec{0} \end{aligned}$$

türevi sıfır olan bir ifade bulunur ve $\vec{u}$ sabit olur. Böylece ispatın bir yönü ispatlanmış olur.

$(\Leftarrow)$: $\dfrac{k_1}{k_2}$ oranı sabit kabul edelim. O halde $\dfrac{k_1}{k_2} = \eta$ ve η sabit sayısına karşılık gelen $\eta = -\dfrac{\eta_2}{\eta_1}$ eşitliği alınabilir. Bu eşitlikten

$$\frac{k_1}{k_2} = -\frac{\eta_2}{\eta_1}$$
$$k_1(\eta_1) + k_2(\eta_2) = 0$$

eşitliği yazılabilir. (4.94) denkleminde türev alınırsa

$$\begin{aligned} \vec{u}' &= (\eta_1)\vec{N}_1' + (\eta_2)\vec{N}_2' \\ &= (\eta_1)(k_1\vec{N}) + (\eta_2)(k_2\vec{N}) \\ &= \left[k_1(\eta_1) + k_2(\eta_2)\right]\vec{N} = \vec{0} \end{aligned}$$

türevi sıfır olan bir ifade bulunur ve $\vec{u}$ sabit olur. Şimdi $\langle \vec{N}_1, \vec{u} \rangle$ ifadesinin sabit olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \langle \vec{N}_1, \vec{u} \rangle &= \langle \vec{N}_1, (\eta_1)\vec{N}_1 + (\eta_2)\vec{N}_2 \rangle \\ &= (\eta_1)\langle \vec{N}_1, \vec{N}_1 \rangle + (\eta_2)\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle \\ &= (\eta_1)\underbrace{\langle \vec{N}_1, \vec{N}_1 \rangle}_{1} + (\eta_2)\underbrace{\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle}_{0} \\ &= \eta_1(sbt) \end{aligned}$$

buradan α eğrisinin slant helis olduğunu göstermiş olup ispatı tamamlanır.

Teorem 4.2.3.2. $\alpha : \mathrm{I} \to \mathrm{E}_1^3$ sıfırdan farklı k_1 ve k_2 N-Bishop çatısının eğriliklerine sahip birim hızlı spacelike eğridir. α slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\det\left(\vec{N}_1', \vec{N}_1'', \vec{N}_1'''\right) = 0$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $(\Rightarrow)$: α slant helis olsun. Bu durumda $\dfrac{k_1}{k_2}$ sabittir. (3.9) denklemlerinden $\vec{N}_1' = k_1\vec{N}$ eşitinin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \vec{N}_1'' &= k_1'\vec{N} + k_1\vec{N}' \\ &= k_1'\vec{N} + k_1^2\vec{N}_1 + k_1k_2\vec{N}_2 \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikte tekrar türev alıp (3.9) denklemlerinden

$$\begin{aligned}\vec{N}_1''' &= 2k_1k_1'\vec{N}_1 + k_1^{2}(k_1\vec{N}) + k_1''\vec{N} + k_1'(k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2) + k_1'k_2\vec{N}_2 + k_2'k_1\vec{N}_2 + k_1k_2(k_2\vec{N}) \\ &= (k_1^{3} + k_1'' + k_1k_2^{2})\vec{N} + (3k_1k_1')\vec{N}_1 + (2k_1'k_2 + k_2'k_1)\vec{N}_2\end{aligned}$$

ifadesi bulunur. Şimdi bulduğumuz eşitlikleri kullanarak $\det\left(\vec{N}_1', \vec{N}_1'', \vec{N}_1'''\right)$ ifadesi hesaplanır; yani,

$$\begin{aligned}\det\left(\vec{N}_1', \vec{N}_1'', \vec{N}_1'''\right) &= \begin{vmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ k_1' & k_1^{2} & k_1k_2 \\ k_1^{3} + k_1'' + k_1k_2^{2} & 3k_1k_1' & 2k_1'k_2 + k_2'k_1 \end{vmatrix} \\ &= k_1\left[2k_1'k_2k_1^{2} + k_2'k_1^{3} - 3k_1^{2}k_2k_1'\right] \\ &= -k_1\left[k_1^{2}k_2k_1' - k_2'k_1^{3}\right] \\ &= -k_1^{3}\left[k_2k_1' - k_1k_2'\right] \\ &= -k_1^{3}k_2^{2}\left[\frac{k_1}{k_2}\right]'\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. α slant helis olduğundan $\frac{k_1}{k_2}$ sabittir. O halde $\left[\frac{k_1}{k_2}\right]' = 0$ dır. Buradan

$$\det\left(\vec{N}_1', \vec{N}_1'', \vec{N}_1'''\right) = 0$$

dır.

$(\Leftarrow)$: $\det\left(\vec{N}_1', \vec{N}_1'', \vec{N}_1'''\right) = 0$ olduğunu kabul edelim.

$$\det\left(\vec{N}_1', \vec{N}_1'', \vec{N}_1'''\right) = -k_1^{3}k_2^{2}\left[\frac{k_1}{k_2}\right]' = 0 \quad \text{ve buradan } k_1^{3}k_2^{2}\left[\frac{k_1}{k_2}\right]' = 0 \text{ olup } \left[\frac{k_1}{k_2}\right]' = 0\ ,\ k_2 \neq 0$$

burada türevi sıfır olan $\frac{k_1}{k_2}$ sabittir. O halde α bir slant helistir. İspat tamamlanır.

Teorem 4.2.3.3. $\alpha : I \to E_1^3$ sıfırdan farklı k_1 ve k_2 N-Bishop çatısının eğriliklerine sahip birim hızlı spacelike eğridir. α slant helis olması için gerek ve yeter şart $\det\left(\vec{N}_2', \vec{N}_2'', \vec{N}_2'''\right) = 0$ eşitliği sağlanır.

İspat. $(\Rightarrow)$: α slant helis olsun. Bu durumda $\dfrac{k_1}{k_2}$ sabittir. (3.9) denklemlerinden $\vec{N}_2' = k_2\vec{N}$ eşitinin türevini alırsak

$$\vec{N}_2'' = k_2'\vec{N} + k_2\vec{N}'$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikte (3.9) türev denklemleri yerine yazılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \vec{N}_2'' &= k_2'\vec{N} + k_2\left(k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2\right) \\ &= k_2'\vec{N} + k_1k_2\vec{N}_1 + k_2^2\vec{N}_2 \end{aligned}$$

ifadesi bulunur. Bu ifadede tekrar türev alınıp (3.9) türev denklemlerini yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \vec{N}_2''' &= k_1'k_2\vec{N}_1 + k_1k_2'\vec{N}_1 + k_1k_2\vec{N}_1' + k_2''\vec{N} + k_2'\vec{N}' + 2k_2k_2'\vec{N}_2 + k_2^2\vec{N}_2' \\ &= k_1'k_2\vec{N}_1 + k_1k_2'\vec{N}_1 + k_1k_2(k_1\vec{N}) + k_2''\vec{N} + k_2'(k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2) + 2k_2k_2'\vec{N}_2 + k_2^2(k_2\vec{N}) \\ &= (k_2^3 + k_2'' + k_2k_1^2)\vec{N} + (2k_1k_2' + k_2k_1')\vec{N}_1 + (3k_2k_2')\vec{N}_2 \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Şimdi $\det\left(\vec{N}_2', \vec{N}_2'', \vec{N}_2'''\right)$ ifadesini hesaplamak için bulduğumuz eşitlikleri determinant ifadesinde yerine yazılarak gerekli hesaplamalar yapılır; yani,

$$\det\left(\vec{N}_2', \vec{N}_2'', \vec{N}_2'''\right) = \begin{vmatrix} k_2 & 0 & 0 \\ k_2' & k_1k_2 & k_2^{\,2} \\ k_2^{\,3} + k_2'' + k_2k_1^{\,2} & 2k_1k_2' + k_2k_1' & 3k_2k_2' \end{vmatrix}$$

$$= k_2(3k_1k_2^{\,2}k_2' - 2k_1k_2^{\,2}k_2' - k_2^{\,3}k_1')$$

$$= -k_2(k_2^{\,3}k_1' - k_1k_2^{\,2}k_2')$$

$$= -k_2^{\,3}(k_2k_1' - k_1k_2')$$

$$= -k_2^{\,5}\left[\frac{k_1}{k_2}\right]'$$

eşitliği bulunur. α slant helis olduğundan $\dfrac{k_1}{k_2}$ sabittir. O halde $\left[\dfrac{k_1}{k_2}\right]' = 0$ dır. Buradan,

$$\det\left(\vec{N}_2', \vec{N}_2'', \vec{N}_2'''\right) = 0$$

elde edilir.

$(\Leftarrow)$: $\det\left(\vec{N}_2', \vec{N}_2'', \vec{N}_2'''\right) = 0$ eşitini kabul edelim. Bu durumda,

$$\det\left(\vec{N}_2', \vec{N}_2'', \vec{N}_2'''\right) = -k_2^{\,5}\left[\frac{k_1}{k_2}\right]' = 0$$

olduğundan

$$k_2^{\,5}\left[\frac{k_1}{k_2}\right]' = 0 \quad , \; k_2 \neq 0$$

eşitliği elde eddilir ki buradan $\left[\dfrac{k_1}{k_2}\right]' = 0$ olduğu görülür ve $\dfrac{k_1}{k_2}$ sabit olur. O halde α bir slant helistir. İspat tamamlanır.

Teorem 4.2.3.4. $\alpha : \mathrm{I} \to \mathrm{E}_1^3$ sıfırdan farklı k_1 ve k_2 N-Bishop çatısının eğriliklerine sahip birim hızlı spacelike eğridir. α slant helis olması için gerek ve yeter şart $\det\left(\vec{N}', \vec{N}'', \vec{N}'''\right) = 0$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow): \alpha$ slant helis olsun. Bu durumda $\dfrac{k_1}{k_2}$ sabittir. (3.9) denklemlerinden $\vec{N}' = k_1\vec{N}_1 - k_2\vec{N}_2$ eşitliğinin türevini aldıktan sonra (3.9) denklemlerini yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılır; yani,

$$\begin{aligned}
N' &= k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2 \\
&= k_1'\vec{N}_1 + k_1\vec{N}_1' + k_2'\vec{N}_2 + k_2\vec{N}_2' \\
&= k_1'\vec{N}_1 + k_1(k_1\vec{N}) + k_2'\vec{N}_2 + k_2(k_2\vec{N}) \\
&= (k_1^2 + k_2^2)\vec{N} + k_1'\vec{N}_1 + k_2'\vec{N}_2
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte tekrar türev alınarak (3.9) denklemlerini yerini yazıp gerekli düzenlemeler yapılır; yani,

$$\begin{aligned}
\vec{N}''' &= (2k_1k_1' + 2k_2k_2')\vec{N} + (k_1^2 + k_2^2)\vec{N}' + k_1''\vec{N}_1 + k_1'\vec{N}_1' + k_2''\vec{N}_2 + k_2'\vec{N}_2' \\
&= (2k_1k_1' + 2k_2k_2')\vec{N} + (k_1^2 + k_2^2)(k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2) + k_1''\vec{N}_1 + k_1'(k_1\vec{N}) + k_2''\vec{N}_2 + k_2'(k_2\vec{N}) \\
&= (3k_1k_1' + 3k_2k_2')\vec{N} + (k_1'' + k_1^3 + k_1k_2^2)\vec{N}_1 + (k_2'' + k_1^2k_2 + k_2^3)\vec{N}_2
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi $\det\left(\vec{N}', \vec{N}'', \vec{N}'''\right)$ ifadesini hesaplamak için determinant eşitliğinde bu bulduğumuz eşitlikleri yerine yazıp gerekli hesaplamalar düzenlemeler yapılır; yani,

$$\begin{aligned}
\det\left(\vec{N}', \vec{N}'', \vec{N}'''\right) &= \begin{vmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ (k_1^2 + k_2^2) & k_1' & k_2' \\ (3k_1k_1' + 3k_2k_2') & (k_1'' + k_1^3 + k_1k_2^2) & (k_2'' + k_1^2k_2 + k_2^3) \end{vmatrix} \\
&= -k_1\left[(k_1^2 + k_2^2)(k_2'' + k_1^2k_2 + k_2^3) - 3k_1k_1'k_2' - 3k_2k_2'^2\right] \\
&\quad + k_2\left[(k_1^2 + k_2^2)(k_1'' + k_1^3 + k_1k_2^2) - 3k_1k_1'^2 - 3k_2k_2'k_1'\right] \\
&= -\left(3k_1k_2^2k_1' + 3k_2^3k_2'\right)\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' + \left(k_1^2 + k_2^2\right)\left[k_2k_1'' - k_1k_2''\right]
\end{aligned}$$

$$= -\left(3k_1k_2^{\,2}k_1' + 3k_2^{\,3}k_2'\right)\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' + \left[\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 + 1\right]\left[\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'' k_2^{\,4} + 2k_2^{\,3}k_2'\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right] \qquad (4.95)$$

eşitliği bulunur. α slant helis olduğundan $\frac{k_1}{k_2}$ sabittir. Buradan $\left[\frac{k_1}{k_2}\right]' = 0$ olup (4.95) denkleminden $\det\left(\vec{N}', \vec{N}'', \vec{N}'''\right) = 0$ olur ki ispatın bir yönü tamamlanır.

$(\Leftarrow)$: $\det\left(\vec{N}', \vec{N}'', \vec{N}'''\right) = 0$ eşitliği kabul edelim. Bu durumda (4.95) denkleminden $\left[\frac{k_1}{k_2}\right]' = 0$ olur ve buradan $\frac{k_1}{k_2}$ sabittir. O halde α slant helis olup ispat tamamlanır.

Minkowski 3-uzayında alınan bir α spacelike eğrisi slant helis olsun. O zaman N-Bishop çatısının $\alpha'(s) = T$ vektörüne göre kovaryant türev

$$\begin{aligned} D_T\vec{N} &= k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2 \\ D_T\vec{N}_1 &= k_1\vec{N} \\ D_T\vec{N}_2 &= k_2\vec{N} \end{aligned} \qquad (4.96)$$

denklemleri yazılır. Herhangi $s \in \mathrm{I}$ için $N_1(s)$ ve $N_2(s)$ vektör alanları olup k_1 ve k_2 eğrilikleri s parametreli fonksiyonlardır.

Teorem 4.2.3.5. Minkowski 3-uzayında alınan birim hızlı bir spacelike α eğrisinin bir slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$D_T(D_TD_T\vec{N}_1) = D_T\vec{N}_1\left(\frac{k_1''}{k_1} + k_2^2 + k_1^{\,2}\right) + 3k_1'D_T\vec{N} \qquad (4.97)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $(\Rightarrow)$: Farz edelim ki α slant helis olsun. (4.97) eşitliğini ispalamak için (4.96) eşitliklerinden $D_T\vec{N}_1 = k_1\vec{N}$ eşitliğin kovaryant türevini alıp (4.96) eşitlikleri yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılır; yani,

$$
\begin{aligned}
D_T(D_T\vec{N}_1) &= D_T(k_1\vec{N}) \\
&= k_1'\vec{N} + k_1 D_T\vec{N} \\
&= k_1'\vec{N} + k_1(k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2) \\
&= k_1'\vec{N} + k_1^{\,2}\vec{N}_1 + k_1k_2\vec{N}_2
\end{aligned}
\tag{4.98}
$$

eşitliği bulunur. (4.98) eşitliğin kovaryant türevini alıp (4.96) eşitliklerini yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılır; yani,

$$
\begin{aligned}
D_T(D_TD_T\vec{N}_1) &= D_T(k_1'\vec{N} + k_1^{\,2}\vec{N}_1 + k_1k_2\vec{N}_2) \\
&= k_1''\vec{N} + k_1'D_T\vec{N} + 2k_1k_1'\vec{N}_1 + k_1^{\,2}D_T\vec{N}_1 + (k_1'k_2 + k_1k_2')\vec{N}_2 + k_1k_2\left(k_2\vec{N}\right) \\
&= \left(k_1'' + k_1k_2^2\right)\vec{N} + k_1'D_T\vec{N} + 2k_1k_1'\vec{N}_1 + k_1^{\,2}D_T\vec{N}_1 + (k_1'k_2 + k_1k_2')\vec{N}_2
\end{aligned}
\tag{4.99}
$$

eşitliği bulunur. α slant helis olduğundan $\dfrac{k_1}{k_2} = sbt$ yazılır. Bu eşitliğin türevini alırsak $\left(\dfrac{k_1}{k_2}\right)' = 0$ elde edilir. Bu eşitlikte türev hesaplaması yapıp gerekli düzenlemeler yapılarak

$$
\begin{aligned}
\frac{k_1'k_2 - k_1k_2'}{k_2^2} &= 0 \\
k_1'k_2 - k_1k_2' &= 0 \\
k_1'k_2 &= k_1k_2'
\end{aligned}
\tag{4.100}
$$

ifadesi bulunur ve diğer taraftan (4.96) eşitliklerinden

$$
N = \frac{1}{k_1}D_T\vec{N}_1 \tag{4.101}
$$

eşitliği yazılabilir. Şimdi (4.100) ve (4.101) ifadelerini kullanarak (4.99) denkleminde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılır; yani,

$$D_T(D_T D_T N_1) = \left(k_1'' + k_1 k_2^2\right) N + k_1' D_T N + 2k_1' \left(\underbrace{k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2}_{D_T N}\right) + k_1^{\,2} D_T \vec{N}_1$$

$$= (k_1'' + k_1 k_2^2) N + k_1^{\,2} D_T \vec{N}_1 + 3k_1' D_T N$$

$$= (k_1'' + k_1 k_2^2)\left(\frac{1}{k_1} D_T \vec{N}_1\right) + k_1^{\,2} D_T \vec{N}_1 + 3k_1' D_T N$$

$$= D_T \vec{N}_1 \left(\frac{k_1''}{k_1} + k_2^2 + k_1^{\,2}\right) + 3k_1' D_T N$$

(4.97) eşitliği elde edilir ve ispatın bir yönü tamamlanır.

$(\Leftarrow)$: Tersine (4.97) denkleminin doğru olduğunu kabul edelim. Bu durumda α eğrisinin slant helis olduğunu göstermeye çalışalım. Bunun için (4.101) denklemin kovaryant türevini alarak

$$D_T \vec{N} = D_T\left(\frac{1}{k_1} D_T \vec{N}_1\right)$$

$$= -\frac{k_1'}{k_1^2} D_T \vec{N}_1 + \frac{1}{k_1} D_T D_T \vec{N}_1$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikte tekrar kovaryant türev alarak gerekli düzenlemeler yapılır; yani,

$$D_T D_T \vec{N} = D_T\left(-\frac{k_1'}{k_1^2} D_T \vec{N}_1 + \frac{1}{k_1} D_T D_T \vec{N}_1\right)$$

$$= -\left(\frac{k_1'}{k_1^2}\right)' D_T \vec{N}_1 - \frac{k_1'}{k_1^2} D_T D_T \vec{N}_1 - \frac{k_1'}{k_1^2} D_T D_T \vec{N}_1 + \frac{1}{k_1} D_T D_T D_T \vec{N}_1 \qquad (4.102)$$

eşitliği bulunur. (4.102) denkleminde (4.97) denklemini yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılarak

$$D_T D_T \vec{N} = -\left(\frac{k_1'}{k_1^2}\right)' D_T \vec{N}_1 - \frac{k_1'}{k_1^2} D_T D_T \vec{N}_1 - \frac{k_1'}{k_1^2} D_T D_T \vec{N}_1 + \frac{1}{k_1}\left(D_T \vec{N}_1 \left(\frac{k_1''}{k_1} + k_2^2 + k_1^{\,2}\right) + 3k_1' D_T \vec{N}\right)$$

$$= -\left(\frac{k_1'}{k_1^2}\right)' D_T \vec{N}_1 - \frac{k_1'}{k_1^2} D_T D_T \vec{N}_1 - \frac{k_1'}{k_1^2} D_T D_T \vec{N}_1 + D_T \vec{N}_1 \left(\frac{k_1''}{k_1^2} + \frac{k_2^2}{k_1} + k_1\right) + \frac{3k_1'}{k_1} D_T \vec{N}$$

$$= \left(-\left(\frac{k_1'}{k_1^2}\right)' + \frac{k_1''}{k_1^2} + \frac{k_2^2}{k_1} + k_1\right) D_T \vec{N}_1 - \frac{2k_1'}{k_1^2} D_T D_T \vec{N}_1 + \frac{3k_1'}{k_1} D_T \vec{N}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde (4.96) ve (4.98) denklemleri yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$
\begin{aligned}
D_T D_T \vec{N} &= \left(-\left(\frac{k_1'}{k_1^2} \right)' + \frac{k_1''}{k_1^2} + \frac{k_2^2}{k_1} + k_1 \right) D_T \vec{N}_1 - \frac{2k_1'}{k_1^2}\left(k_1' \vec{N} + k_1^{\,2} \vec{N}_1 + k_1 k_2 \vec{N}_2 \right) + \frac{3k_1'}{k_1}\left(k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2 \right) \\
&= \left(-\left(\frac{k_1'}{k_1^2} \right)' + \frac{k_1''}{k_1^2} + \frac{k_2^2}{k_1} + k_1 \right) D_T \vec{N}_1 - \frac{2(k_1')^2}{k_1^2} \vec{N} - 2k_1' \vec{N}_1 - \frac{2k_1' k_2}{k_1} \vec{N}_2 + 3k_1' \vec{N}_1 + \frac{3k_1' k_2}{k_1} \vec{N}_2 \\
&= \left(-\left(\frac{k_1'}{k_1^2} \right)' + \frac{k_1''}{k_1^2} + \frac{k_2^2}{k_1} + k_1 \right) D_T \vec{N}_1 + k_1' \vec{N}_1 + \frac{k_1' k_2}{k_1} \vec{N}_2 - \frac{2(k_1')^2}{k_1^2} \vec{N} \qquad (4.103)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir ve diğer yandan $D_T D_T \vec{N}$ ifadesi (4.96) denklemlerin tekrar kovaryant türevini alarak bulunabilir; yani,

$$
\begin{aligned}
D_T D_T \vec{N} &= D_T \left(k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2 \right) \\
&= k_1' \vec{N}_1 + k_1 D_T \vec{N}_1 + k_2' \vec{N}_2 + k_2 D_T \vec{N}_2 \\
&= k_1' \vec{N}_1 + k_1 D_T \vec{N}_1 + k_2' \vec{N}_2 + k_2^2 \vec{N} \qquad (4.104)
\end{aligned}
$$

kovaryant türev denklemi bulunur. Şimdi (4.103) ve (4.104) denklemlerini eşitleyerek

$$
\frac{k_1' k_2}{k_1} = k_2'
$$

eşitliği yazılır. Bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılır; yani,

$$
\begin{aligned}
\frac{k_1'}{k_1} &= \frac{k_2'}{k_2} \\
k_2 k_1' &= k_1 k_2' \\
k_2 k_1' - k_1 k_2' &= 0 \\
\left(\frac{k_1}{k_2} \right)' &= 0
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. Burada türevi sıfır olan $\frac{k_1}{k_2} = sbt$ eşitliği yazılır ve buradan α bir slant helistir.

Teorem 4.2.3.6. Minkowski 3-uzayında alınan birim hızlı bir spacelike α eğrisinin bir slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$D_T(D_T D_T \vec{N}_2) = D_T \vec{N}_2 \left(\frac{k_2''}{k_2} + k_2^2 + k_1^{\,2}\right) + 3k_2' D_T \vec{N} \tag{4.105}$$

eşitliğini sağlar.

İspat. Kabul edelim ki α bir slant helistir. (4.105) denklemini ispatlamak için (4.96) denklemlerinden $D_T \vec{N}_2 = k_2 \vec{N}$ eşitliğin kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned} D_T(D_T \vec{N}_2) &= D_T(k_2 \vec{N}) \\ &= k_2{}' \vec{N} + k_2 D_T \vec{N} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte (4.96) denklemleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} D_T D_T \vec{N}_2 &= k_2{}' \vec{N} + k_2(k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2) \\ &= k_2{}' \vec{N} + k_1 k_2 \vec{N}_1 + k_2^2 \vec{N}_2 \end{aligned}$$

ifadesi elde edillir. Bu eşitlikte tekrar kovaryant türev alıp (4.96) eşitliği yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} D_T(D_T D_T \vec{N}_2) &= D_T(k_2{}' \vec{N} + k_1 k_2 \vec{N}_1 + k_2^2 \vec{N}_2) \\ &= k_2'' \vec{N} + k_2' D_T \vec{N} + 2k_2 k_2' \vec{N}_2 + k_2^2 D_T \vec{N}_2 + (k_1' k_2 + k_1 k_2') \vec{N}_1 + k_1 k_2 D_T \vec{N}_1 \end{aligned}$$

$$D_T(D_T D_T \vec{N}_2) = k_2'' \vec{N} + k_2' D_T \vec{N} + 2k_2 k_2' \vec{N}_2 + (k_1' k_2 + k_1 k_2') \vec{N}_1 + k_1 k_2 (k_1 \vec{N}) + k_2^2 D_T \vec{N}_2 \tag{4.106}$$

eşitliği bulunur. α slant helis olduğundan $\frac{k_1}{k_2} = sbt$ yazılır. Bu eşitlikten dolayı (4.100) eşitliği (4.106) denkleminde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$D_T(D_T D_T \vec{N}_2) = k_2'' \vec{N} + k_1^2 k_2 \vec{N} + k_2' D_T \vec{N} + 2k_2'(\underbrace{k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2}_{D_T \vec{N}}) + k_2^2 D_T \vec{N}_2$$

$$= (k_2'' + k_1^2 k_2)\vec{N} + k_2^2 D_T \vec{N}_2 + 3k_2' D_T \vec{N} \tag{4.107}$$

eşitliği bulunur. (4.96) denklemlerinden

$$N = \frac{1}{k_2} D_T \vec{N}_2$$

eşitliği yazılabilir ve bu eşitlik (4.107) denkleminde yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$D_T(D_T D_T N_2) = (k_2'' + k_1^2 k_2)(\frac{1}{k_2} D_T N_2) + k_2^2 D_T \vec{N}_2 + 3k_2' D_T N$$

$$= D_T \vec{N}_2 (\frac{k_2''}{k_2} + k_2^2 + k_1^2) + 3k_2' D_T N$$

(4.105) eşitliği bulunur ve ispatın bir yönü tamamlanmış olur. Tersine (4.105) denklemini doğru kabul edip α eğrinin slant helis olduğunu bezer şekilde gösterilir.

Teorem 4.2.3.7. Minkowski 3-uzayında birim hızlı bir spacelike α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart

i. $$D_T(D_T D_T \vec{N}) = D_T \vec{N}(\frac{k_1''}{k_1} + k_1^2 + k_2^2) + 3k_1' D_T \vec{N}_1 + 3k_2' D_T \vec{N}_2 \tag{4.108}$$

ii. $$D_T(D_T D_T \vec{N}) = D_T \vec{N}\left(\frac{k_2''}{k_2} + k_1^2 + k_2^2\right) + 3k_1' D_T \vec{N}_1 + 3k_2' D_T \vec{N}_2 \tag{4.109}$$

iii. $$D_T(D_T D_T \vec{N}) = D_T \vec{N}\left(\frac{k_1''}{2k_1} + \frac{k_2''}{2k_2} + k_1^2 + k_2^2\right) + 3k_1' D_T \vec{N}_1 + 3k_2' D_T \vec{N}_2 \tag{4.110}$$

i, ii, iii durumlardan biri sağlanır.

İspat. Kabul edelim ki α bir slant helistir. (4.108), (4.109) ve (4.110) eşitliklerini göstermek için (4.96) denklemlerinden $D_T \vec{N} = k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2$ eşitliğin kovaryant türevi alınıp gerekli düzenlemeler yapılarak

$$
\begin{aligned}
D_T(D_T\vec{N}) &= D_T(k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2) \\
&= k_1'\vec{N}_1 + k_1 D_T\vec{N}_1 + k_2'\vec{N}_2 + k_2 D_T\vec{N}_2 \\
&= k_1^2\vec{N} + k_2^2\vec{N} + k_1'\vec{N}_1 + k_2'\vec{N}_2
\end{aligned}
$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikte tekrar kovaryant türev alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
D_T(D_T D_T\vec{N}) &= D_T(k_1^2\vec{N} + k_2^2\vec{N} + k_1'\vec{N}_1 + k_2'\vec{N}_2) \\
&= 2k_1k_1'\vec{N} + k_1^2 D_T\vec{N} + 2k_2k_2'\vec{N} + k_2^2 D_T\vec{N} + k_1''\vec{N}_1 + k_1' D_T\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2 + k_2' D_T\vec{N}_2
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte (4.96) denklemlerini tatbik edip gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
D_T(D_T D_T\vec{N}) &= 2k_1' D_T\vec{N}_1 + 2k_2' D_T\vec{N}_2 + k_1^2 D_T\vec{N} + k_2^2 D_T\vec{N} + k_1''\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2 + k_1' D_T\vec{N}_1 + k_2' D_T\vec{N}_2 \\
&= 3k_1' D_T\vec{N}_1 + 3k_2' D_T\vec{N}_2 + D_T\vec{N}(k_1^2 + k_2^2) + k_1''\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2 \qquad (4.111)
\end{aligned}
$$

denklemi elde edilir. Şimdi $k_1''\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2$ ifadesinin özdeşliğini bulmaya çalışalım. Bunun için α eğrisi slant helis olduğundan $\frac{k_1}{k_2} = sbt$ yazılabilir. Bu eşitlikte türev alınırsa

$$
\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' = 0
$$

eşiti bulunur. Burada bölüm türevi uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
\frac{k_1'k_2 - k_1k_2'}{k_2^2} &= 0 \\
k_1'k_2 - k_1k_2' &= 0 \qquad (4.112) \\
k_1'k_2 &= k_1k_2'
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. (4.112) eşitliğinden

$$
\frac{k_1'}{k_2'} = \frac{k_1}{k_2} \qquad (4.113)
$$

yazılabilir. Burada $\frac{k_1}{k_2} = sbt$ olduğundan $\frac{k_1'}{k_2'} = sbt$ olduğu açıktır. Burada tekrar bölüm türevi uygulanırsa

$$\frac{k_1''k_2' - k_1'k_2''}{k_2'^2} = 0$$
$$k_1''k_2' - k_1'k_2'' = 0$$
$$k_1''k_2' = k_1'k_2'' \qquad (4.114)$$
$$\frac{k_1''}{k_2''} = \frac{k_1'}{k_2'}$$

eşitliği elde edilir. (4.113) ve (4.114) eşitlikleri göz önüne alarak

$$\frac{k_1''}{k_2''} = \frac{k_1'}{k_2'} = \frac{k_1}{k_2}$$

ifadesi yazılır. Buradan

$$\frac{k_1''}{k_2''} = \frac{k_1}{k_2}$$
$$k_1''k_2 = k_1k_2'' \qquad (4.115)$$

olur. (4.115) eşitlikten $\frac{k_1''}{k_1} = \frac{k_2''}{k_2} = a$ yazıp $\frac{k_1''}{k_1} = a$ ve $\frac{k_2''}{k_2} = a$ eşitliklerini $k_1''\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2$ ifadesinde kullanarak özdeşliklerini bulalım; yani,

$$\begin{aligned} k_1''\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2 &= \frac{k_1''}{k_1}k_1\vec{N}_1 + \frac{k_2''}{k_2}k_2\vec{N}_2 \\ &= ak_1\vec{N}_1 + ak_2\vec{N}_2 \\ &= a(k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2) \\ &= aD_T\vec{N} \end{aligned}$$

$$k_1''\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2 = \frac{k_1''}{k_1}D_T\vec{N} \quad \text{veya} \quad k_1''\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2 = \frac{k_2''}{k_2}D_T\vec{N} \qquad (4.116)$$

eşitliklerini yazabiliriz. (4.116) eşitliklerini (4.11) denkleminde yerine ayrı ayrı yazıp gerekli düzenlemeler yaparak

$$\begin{aligned} D_T(D_TD_T\vec{N}) &= D_T\vec{N}(k_1^2 + k_2^2) + \frac{k_1''}{k_1}D_T\vec{N} + 3k_1'D_T\vec{N}_1 + 3k_2'D_T\vec{N}_2 \\ &= D_T\vec{N}\left(\frac{k_1''}{k_1} + k_1^2 + k_2^2\right) + 3k_1'D_T\vec{N}_1 + 3k_2'D_T\vec{N}_2 \end{aligned}$$

(4.108) eşitliği bulunur. Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
D_T(D_T D_T \vec{N}) &= D_T \vec{N}(k_1^2 + k_2^2) + \frac{k_2''}{k_2} D_T \vec{N} + 3k_1' D_T \vec{N}_1 + 3k_2' D_T \vec{N}_2 \\
&= D_T \vec{N}\Big(\frac{k_2''}{k_2} + k_1^2 + k_2^2\Big) + 3k_1' D_T \vec{N}_1 + 3k_2' D_T \vec{N}_2
\end{aligned}
$$

(4.109) eşitliği de bulunur. (4.110) eşitliğini göstermek için

$$
D_T \vec{N}\left(\frac{k_1''}{k_1} + \frac{k_2''}{k_2}\right)
$$

eşitini bulmaya çalışalım; yani,

$$
\begin{aligned}
D_T \vec{N}\left(\frac{k_1''}{k_1} + \frac{k_2''}{k_2}\right) &= \left(k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2\right)\left(\frac{k_1''}{k_1} + \frac{k_2''}{k_2}\right) \\
&= k_1'' \vec{N}_1 + k_2'' \vec{N}_2 + \frac{k_1 k_2''}{k_2} \vec{N}_1 + \frac{k_1'' k_2}{k_1} \vec{N}_2
\end{aligned}
$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikte (4.115) eşitliği yerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
D_T \vec{N}\left(\frac{k_1''}{k_1} + \frac{k_2''}{k_2}\right) &= k_1'' \vec{N}_1 + k_2'' \vec{N}_2 + \frac{k_1'' k_2}{k_2} \vec{N}_1 + \frac{k_1 k_2''}{k_1} \vec{N}_2 \\
&= k_1'' \vec{N}_1 + k_2'' \vec{N}_2 + k_1'' \vec{N}_1 + k_2'' \vec{N}_2 \\
&= 2\left(k_1'' \vec{N}_1 + k_2'' \vec{N}_2\right)
\end{aligned}
$$

ifadesi bulunur. Bu eşitlikten

$$
2\left(k_1'' \vec{N}_1 + k_2'' \vec{N}_2\right) = D_T \vec{N}\left(\frac{k_1''}{k_1} + \frac{k_2''}{k_2}\right)
$$

$$
k_1'' \vec{N}_1 + k_2'' \vec{N}_2 = D_T \vec{N}\left(\frac{k_1''}{2k_1} + \frac{k_2''}{2k_2}\right)
$$

eşitliği bulunur. Bu eşitliği (4.111) denkleminde yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
D_T(D_T D_T \vec{N}) &= D_T \vec{N}(k_1^2 + k_2^2) + D_T \vec{N}\left(\frac{k_1''}{2k_1} + \frac{k_2''}{2k_2}\right) + 3k_1' D_T \vec{N}_1 + 3k_2' D_T \vec{N}_2 \\
&= D_T \vec{N}\left(\frac{k_1''}{2k_1} + \frac{k_2''}{2k_2} + k_1^2 + k_2^2\right) + 3k_1' D_T \vec{N}_1 + 3k_2' D_T \vec{N}_2
\end{aligned}
$$

(4.110) eşitliği elde edilir. Böylece ispatın bir yönü tamamlanır. Tersine (4.108), (4.109) ve (4.110) denklemlerini doğru kabul edip α eğrisinin slant helis olduğunu bezer şekilde gösterilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında ilk olarak üç boyutlu Öklid uzayında N-Bishop çatısına göre slant helislerin karakterizasyonları verildi. Daha sonra üç boyutlu Minkowski uzayında timelike eğrileri ile asli normali ve binormali spacelike olan spacelike eğrilerinin N-Bishop çatısına göre slant helislerin karakterizasyonları incelendi. İleride yapılacak çalışmalarda Öklid ve Minkowski uzayında çeşitli özel eğrilerin N-Bishop çatısına göre farklı karakterizasyonları incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Bishop RL, 1975. There is More than One Way to Frame a Curve. The American Mathematical Monthly, 82(3): 246-251.

[2] Scofield PD, 1995. Curves of Constant Precession. The American Mathematical Monthly, 102(6): 531-537.

[3] Izumiya S, Takeuchi N, 2004. New Special Curves and Developable Surfaces. Turkish Journal of Mathematics, 28(2): 153-164.

[4] Bükcü B, Karacan MK, 2008. Bishop Frame of the Spacelike Curve With a Spacelike Principal Normal in Minkowski 3-Space. Communications Faculte Science University Ankara Series A1 Mathematics Statistics, 57(1): 13-22.

[5] Bükcü B, Karacan MK, 2008. Special Bishop Motion and Bishop Darboux Rotation Axis of The Space Curve. Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories, 6(1): 27-34.

[6] Bükcü B, Karacan MK, 2008. On the Slant Helices Accordıng to Bishop Frame of the Timelike Curve in Lorentzian Space. Tamkang Journal of Mathematıcs, 39(3): 255-262.

[7] Karacan MK, 2008. Bishop Frame of the Timelike Curve in Minkowski 3-Space. SDÜ Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi, 3(1): 80-90.

[8] Bükcü B, Karacan MK, 2009. The Slant Helices According to Bishop Frame. International Journal of Computational and Mathematical Sciences, 3(2): 67-70.

[9] Bükcü B, Karacan MK, 2010. Bishop Frame of the Spacelike Curve With a Spacelike Binormal in Minkowski 3-Space. Selçuk Journal of Applied Mathematics, 11(1): 15-25.

[10] Yılmaz S, Turgut M, 2010. A New Version of Bishop Frame and an Application to Spherical İmages. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 371(2): 764-776.

[11] Yılmaz S, Özyılmaz E, Turgut M, 2010. New Spherical İndicatrices and their Characterizations. An Saint. University Ovidius Constanta, 18(2): 337-354.

[12] Kızıltuğ S, Kaya S, Tarakçı Ö, 2013. Slant Helices According to Type-2 Bishop Frame in Euclidean 3-Space. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 85: 211-222.

[13] Kocayiğit H, Özdemir A, Çetin M, Asartepe SÖ, 2013. Characterizations of Timelike Curves According to the Bishop Darboux Vector in Minkowski 3-Space. In International Mathematical Forum, 8(19): 903-911.

[14] Bükcü B, Karacan MK, 2013. The Slant Helices According to Bishop Frame of The Spacelike Curve in Lorentzian Space. Journal of Interdisciplinary Mathematics, 12(5): 691-700.

[15] Lopez R, 2014. Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space. International Electronic Journal of Geometry, 7(1): 44-107.

[16] Yılmaz S, Ünlütürk Y, 2015. A Note on Spacelike Curves According to Type-2 Bishop Frame in Minkowski 3-Space. International Journal Pure Applied Mathematics, 103(2): 321-332.

[17] Yılmaz S, 2015. A New Version of Bishop Frame and Application to Spherical İmages of Spacelike Curve in Minkowski 3-Space. 6(12): 1414-1425.

[18] Uzunoğlu B, Gök İ, Yaylı Y, 2016. A New Approach on Curves of Constant Precession. Applied Mathematics and Computation, 275: 317-323.

[19] Kocayigit H, Kazaz M, Arı Z, 2016. Some Characterizations of Space Curves According to Bishop Frame in Euclidean 3-Space. Ankara Matematik Günleri, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Universitesi Matematik Bölümü, Ankara, 3-4.

[20] Keskin O, Yaylı Y, 2017. An Application of N-Bishop Frame to Spherical İmages for Direction Curves. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 14(11): 1750162.

[21] Samancı HK, 2018. N-Bishop Frame of the Timelike Curve in Minkowski 3-Space, Submitted.

[22] Samancı HK, Kocayiğit H, 2018. N-Bishop Frame of the Spacelike Curve With Spacelike Binormal, Submitted.

[23] Samancı HK, 2018. N-Bishop Frame of the Spacelike Curve With Spacelike Principal Normal, Submitted.

[24] O'Neill B, 1983. Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity. Academic Press, New York.

[25] Hacısalihoğlu HH, 1993. Differential Geometry. Ankara Üniversitesi Yayınları, Ankara.

[26] Weinstein T, 1996. An İntroduction to Lorentz Surfaces. Walter de Gruyter, 22.

[27] Lee S, Varnado JH, 2006. Spacelike Constant Mean Curvature Surfaces of Revolution in Minkowski 3-Space. Difference Geometry Dynamic Systems, 8: 144-165.

[28] Sabuncuoğlu A, 2006. Diferansiyel Geometri. Nobel Yayın Dağıtım.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Elazığ'da doğdum. İlköğretimi Alacalaya İlköğretim Okulu'nda, ortaokulu Alacakaya Ortaokulu'nda ve liseyi Elazığ Lisesi'nde tamamladım. 2001 yılında kazandığım Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2005 yılında derece ile mezun oldum. 2005-2013 yılları arasında çeşitli özel eğitim kurumlarında matematik öğretmenliği yaptım. Eylül 2013'ten itibaren MEB'de matematik öğretmenliği yapıyorum. Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans programına Eylül 2014'te başladım. Yabancı dilim ingilizcedir. Evliyim ve bir çocuk babasıyım.

Adı Soyadı

Ayhan YILDIZ