T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ VE MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÇİFT İNDİSLİ FONKSİYON DİZİLERİNİN α. DERECEDEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK ÇEŞİTLERİNİN İNCELENMESİ

Dilan ŞEKER

EKİM 2018

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÇİFT İNDİSLİ FONKSİYON DİZİLERİNİN α. DERECEDEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK ÇEŞİTLERİNİN İNCELENMESİ

Hazırlayan
Dilan ŞEKER

Danışman
Doç. Dr. Muhammed ÇINAR

Jüri Üyeleri
Prof. Dr. Harun POLAT
Doç. Dr. Muhammed ÇINAR
Doç. Dr. Murat KARAKAŞ

EKİM 2018

Dilan ŞEKER tarafından hazırlanan **Çift İndisli Fonksiyon Dizilerinin α. Dereceden İstatistiksel Yakınsaklık Çeşitlerinin İncelenmesi** adlı tez çalışması 19/10/2018 tarihinde yapılan sınavla aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Prof. Dr. Harun POLAT (Başkan)	
Doç. Dr. Muhammed ÇINAR (Danışman)	
Doç. Dr. Murat KARAKAŞ (Üye)	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 02/01/2019 gün ve 01/03 Sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fatih Ahmet ÇELİK
Enstitüsü Müdür V.

ÖZET

ÇİFT İNDİSLİ FONKSİYON DİZİLERİNİN α. DERECEDEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK ÇEŞİTLERİNİN İNCELENMESİ

Dilan ŞEKER

Yüksek Lisans Tezi

Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Muhammed ÇINAR
Ekim 2018, 45 sayfa

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde bu çalışma ile ilgili temel tanım, teoremler ve çalışmanın tarihi verildi. İkinci bölümde çift indisli fonksiyon dizilerinin farklarının lacunary istatistiksel yakınsaklığının daha iyi anlaşılması için tek indisli dizilerde doğal yoğunluk, istatistiksel yakınsaklık, Cesaro toplanabilirlik, tek indisli dizilerin fark dizileri için α. dereceden istatistiksel yakınsaklığı, reel değerli çift indisli fonksiyon dizilerinde noktasal, düzgün ve istatistiksel yakınsaklık, kuvvetli çift Cesaro yakınsaklık, reel değerli çift indisli dizilerde α. dereceden istatistiksel yakınsaklık kavramları örneklerle açıklandı. Üçüncü bölümde kullanılan materyal ve yöntemler verildi. Dördüncü bölümde çift indisli fonksiyon dizileri için $\tilde{\alpha}$. dereceden Δ^r- noktasal istatistiksel yakınsaklık, $\hat{\alpha}$. dereceden kuvvetli Δ_p- Cesaro toplanabilirlik, (V, λ, μ) toplamı, genelleştirilmiş de la vallee-pousin ortalaması gibi ilgili tanım ve teoremler verilip α, β gibi ayrı kuvvetler için kapsama bağıntıları incelendi. Daha sonra çift indisli fonksiyon dizilerinin farklarının $\tilde{\alpha}$. dereceden λ ve lacunary istatistiksel yakınsaklığı tanım ve teoremleri ile verildi. Beşinci bölümde ise sonuç ve önerilere yer verildi. Sonuç bölümünde tezde yapılanlar ile kısaca bilgi verilerek öneriler kısmında ise lacunary ile ilgili önerilerde bulunuldu.

Anahtar kelimeler: Yoğunluk, İstatistiksel Yakınsaklık, Lacunary Yakınsaklık, Pringsheim Yakınsaklık, Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık, Çift İndisli Dizi

ABSTRACT

THE INVESTIGATION OF STATISTICAL CONVERGENCE TYPES OF ORDER $\tilde{\alpha}$ FOR DOUBLE FUNCTION SEQUENCES

Dilan ŞEKER

Master Thesis

Bitlis Eren University Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Muhammed ÇINAR

October 2018, 45 pages

This study consists of five chapters. In the first chapter, basic definitions, theorems and the date of the work are given. In the second chapter lacunary statistical convergence of the differences of the double function sequence in the second chapter, natural density, statistical convergence, Cesaro summability in sequences, α for difference sequences. pointwise statistical convergence, uniform and statistical convergence in real valued double function sequences, strong double Cesaro convergence, real valued double sequences. are explained with examples. Materials and methods used in the third chapter are given. In the fourth chapter, for double function sequence Δ^r- pointwise statistical convergence of order $\hat{\alpha}$, the definitions and theorems strong Δ_p- Cesaro summability of order $\tilde{\alpha}$, (V, λ, μ) summation of order $\tilde{\alpha}$ are given and inclusion relations for α,β are examined. Generalized la vallee-pousin mean averages are given and the inclusion relations for separate forces such as α, β are examined. Then the differences of the double indices of function sequence are given by lacunary statistical convergence definition and theorems. In the fifth chapter, conclusions and recommendations are given. In the conclusion section, the information on the thesis and the lacunary are suggested.

Keywords: Density, Statistical Convergence, Lacunary Convergence, Pringsheim Convergence, Lacunary Statistical Convergence, Double Sequence

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması sürecinde her türlü bilgi ve tecrübesinden faydalandığım danışman hocam Doç. Dr. Muhammed ÇINAR'a göstermiş olduğu sabırdan dolayı teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\delta(E)$	E kümesinin yoğunluğu
$S_{(\lambda,\mu)}$	(λ,μ) İstatistiksel yakınsak çift dizilerin kümesi
S	İstatistiksel yakınsak diziler kümesi
$\omega^p[\Delta^m]$	Kuvvetli p-Cesaro yakınsak fark dizilerin kümesi
ω^p	p-Cesaro yakınsak diziler kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
ℓ_∞	Sınırlı diziler kümesi
c_0	Sıfıra yakınsak dizilerin kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
c	Yakınsak dizilerin kümesi

1. GİRİŞ

Reel değerli tek indisli fonksiyon dizilerinde tanımlanan yakınsaklık türleri Analizde çok çalışılan bir konudur. Bu yakınsaklık türlerinden en iyi bilinenler noktasal yakınsaklık ve düzgün yakınsaklıktır. Fakat Analizde çok iyi bilinen bu yakınsaklık türleri gibi noktasal olarak yakınsamayan fonksiyon dizilerinin yakınsaklığını başka tür yakınsaklık modelleri ile karakterize etmek gerekir. Bunun için noktasal yakınsaklıktan daha zayıf olan yakınsaklık türlerine ihtiyaç vardır. Bunlar; istatistiksel yakınsaklık, Lacunary yakınsaklık gibi yakınsaklık türleridir. İstatistiksel yakınsaklık tanımı ilk olarak 1951 yılında birbirinden bağımsız olarak Fast [1] ve Steinhaus [2] tarafından verildi. Bu yakınsaklık tipi klasik anlamda yakınsaklığın bir genelleşmesi olup pozitif tamsayı kümelerinin doğal yoğunluğu kavramına dayanmaktadır. İstatistiksel yakınsaklık günümüze kadar birçok matematikçinin üzerinde çalışmış olduğu ve halen çalışılmakta olan bir konudur. İstatistiksel yakınsaklık; Schoenberg [3] ,Fridy [4] , Connor [5] , Mursaleen [6], Fridy ve Orhan [7], Moricz [8], ve daha birçok matematikçi tarafından çalışıldı. Derece dahil edilerek, bir dizinin α. dereceden istatistiksel yakınsaklığı Gadjiev and Orhan [10] tarafından verildi. Daha sonra bir dizinin α. dereceden kuvvetli $p-$Cesáro toplanabilirliği Çolak [9] tarafından tanımlandı. α. dereceden istatistiksel yakınsaklık ile birlikte çalışıldı. Ayrıca istatistiksel yakınsaklığın genelleştirilmiş bir hali olan α. dereceden $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık Çolak ve Bektaş [12] tarafından çalışıldı.

Çift indisli dizilerin $\lambda-$ istatistiksel yakınsaklığı Mursaleen [32] , Lacunary istatistiksel yakınsaklık ise M. Crnjac [13] ve daha sonra Rıchard. F. Patterson ve Ekrem Savaş [14] tarafından incelenmiştir.

1.1 Temel Tanım Ve Teoremler

Tezin bu bölümünde sonraki bölümlerde kullanılacak bazı temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

1.1.1 Tanım: A boştan farklı bir cümle ve T reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$\begin{aligned} + &: A \times A \to A \\ . &: T \times A \to A \end{aligned}$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa A cümlesine T cismi üzerinde bir vektör (lineer) uzayı denir. Her $\lambda, \mu \in T$ ve $a, b, c, \in A$ için,

L1) $a + b = b + a$

L2)$(a + b) + c = a + (b + c)$

L3)$\forall a \in A$ için $a + \theta = a$ olacak şekilde bir $\theta \in A$ vardır.

L4) Her bir $a \in A$ için $a + (-a) = \theta$ olacak şekilde bir $-a \in A$ vardır.

L5)$1.a = a$

L6)$\lambda (a + b) = \lambda a + \lambda b$

L7)$(\lambda + \mu) a = \lambda a + \mu a$

L8)$\lambda (\mu a) = (\lambda \mu) a$ dir $[17]$.

1.1.2 Tanım: $A, \mathbb{R}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\|.\| : A \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna A üzerinde bir norm ve $(A, \|.\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir.

N1)$\|a\| \geq 0 \, (a \in A)$

N2)$\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = \theta, (a \in A)$

N3)$\|\alpha a\| = |\alpha| \, \|a\|, (\alpha \in T, a \in A)$

N4)$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \, (a, b \in A)$ dir $[17]$.

Bir $(A, \|.\|)$ normlu uzayında alınan her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa bu uzaya tam normlu uzay denir, tam normlu uzaya Banach uzayı da denir $[17]$.

Kompleks terimli tüm $x = (x_k), (k = 1, 2, 3, \ldots)$ dizilerinin cümlesini ω ile göstereceğiz. $x = (x_k), y = (y_k)$, diziler ve α bir skaler olmak üzere,

$$\begin{aligned} x + y &= (x_k + y_k) \\ \alpha x &= (\alpha x_k) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır.

Bu çalışmada sık sık kullanacağımız,

$$l_\infty = \left\{ x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty \right\}$$

sınırlı,

$$c = \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k \text{ vardır} \right\}$$

yakınsak ve,

$$c_0 = \left\{ x = x_k : \lim_k x_k = 0 \right\}$$

sıfır dizileri uzayı,

$$\|x\| = \sup_k |x_k| \tag{1.1}$$

normu ile birer Banach uzayıdır [17] .

1.1.3 Teorem: Y bir X Banach uzayının alt uzayı olsun. Y'nin tam olması için gerek ve yeter şart Y'nin X'de kapalı olmasıdır [17] .

1.1.4 Teorem: (X, d) bir metrik uzay $A \subset X$ ve $\overline{A}$, A'nin kapanışını göstersin. Bu durumda $x \in \overline{A}$ olması için gerek ve yeter şart $x_n \to x$ olacak şekilde A'da bir (x_n) dizisinin mevcut olmasıdır [17] .

1.1.5 Tanım: Eğer $A \neq \varnothing$, $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ kümesine birebir örten bir f fonksiyonu varsa A kümesine sonlu küme denir. Eğer birebir örten bir $f : A \to \mathbb{Z}^+$ fonksiyonu varsa A kümesine sayılabilir küme denir [17] .

1.1.6 Tanım: X boş olmayan bir cümle olsun.

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu, her $x, y, z \in X$ için

M1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M2) $d(x, y) = d(y, x)$

M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$

şartlarını sağlıyorsa d'ye X'de bir metrik, (X, d) ikilisine de metrik uzay denir [17] .

1.1.7 Tanım: (X, d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun,

$$\begin{aligned} B(x_0, r) &= \{x \in X : d(x_0, x) < r\} \\ B[x_0, r] &= \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\} \end{aligned}$$

kümelerine sırasıyla x_0 merkezli r yarıçaplı bir açık yuvar, x_0 merkezli r yarıçaplı bir kapalı yuvar denir $[17]$.

1.1.8 Tanım: X bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun.Her $x \in A$ için $B(x, r) \subseteq A$ olacak şekilde bir r pozitif sayısı varsa A ya X in açık alt cümlesi veya A, X de açıktır denir. X in B altcümlesinin X deki tümleyeni, yani

$$B^c = X - B$$

X de açık ise B cümlesine kapalıdır denir $[17]$.

1.1.9 Tanım: (X, d) bir metrik uzay ve A, X'in bir alt kümesi olsun. X'in A'yı içeren kapalı kümelerinin en küçüğüne A'nın kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir $[17]$.

1.1.10 Tanım: (X, d) bir metrik uzay ve A, X in bir alt cümlesi olsun. A nın kapanışı X e eşit yani $\overline{A} = X$ ise, A cümlesine X'de yoğundur denir. Eğer X in sayılabilir yoğun, bir alt cümlesi varsa X 'e ayrılabilir küme denir $[17]$.

1.1.11 Tanım: Bir (X, d) metrik uzay ve (x_n), X' de bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için, $m, n > N$ olduğunda

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa, (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir $[17]$.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2.1 İstatistiksel Yakınsaklık

İstatistiksel yakınsaklık tanımı Fast [1] tarafından çalışıldı. Daha sonra Schoenberg [3] tarafından istatistiksel yakınsaklık toplanabilme metodu olarak incelendi. İstatistiksel yakınsaklığın bazı temel özellikleri verildi. 1985 de Fridy [4] tarafından istatistiksel Cauchy tanımı verilerek istatistiksel yakınsaklık bir regüler toplanabilme metodu olarak çalışıldı. Sonraki zamanlarda istatistiksel yakınsaklık Connor [5], Maddox [20], , Gadjiev ve Orhan [10] tarafından çalışıldı. α.dereceden kuvvetli $p-$ Cesaro toplanabilirlik Çolak [9] tarafından verildi. α. dereceden istatistiksel yakınsaklık ile olan ilişkisi çalışıldı.

Bu bölümde istatistiksel yakınsaklık, α. dereceden istatistiksel yakınsaklık ve özellikleri incelenecektir.

2.1.1 Doğal Yoğunluk ve İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde doğal yoğunluk kavramı ve doğal yoğunluk yardımıyla istatistiksel yakınsaklık kavramı verilecek ve bazı özellikleri incelenecektir.

Bir $A \subseteq \mathbb{N}$ alt cümlesinin n den küçük veya eşit pozitif tamsayıların sayısını $A(n)$ ile gösterelim. Doğal yoğunluğun tanımını aşağıdaki gibi verebiliriz.

2.1.1.1 Tanım: Bir A cümlesinin asimptotik yoğunluğu,

$$\delta_1(A) = \lim_{n\to\infty} \inf \frac{A(n)}{n}$$

olarak tanımlanır. $(A(n)/n)$ dizisi bir limite sahip ise A cümlesinin doğal yoğunluğu,

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\delta(A) = 0$ ise A cümlesine sıfır yoğunluklu cümle denir $[22]$.

2.1.1.2 Teorem: Her bir n için $a_n \in \mathbb{N}$ ve $(a_n) \to +\infty$ olmak üzere, $K = (a_n)$ ise bu taktirde;

$$\delta_1(K) = \lim_{n\to\infty} \inf \frac{n}{a_n}$$

dır. Eğer $\delta(K)$ mevcut ise,

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n}$$

dır [22] .

2.1.1.3 Tanım: Eğer $x = (x_k)$ dizisinin terimleri sıfır yoğunluklu bir cümle hariç bütün k'lar için herhangi bir P özelliğini sağlıyorsa, (x_k) dizisi hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir ve "$h.h.k.$" şeklinde gösterilir [4] .

2.1.1.4 Tanım: $x = (x_k)$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \le n : |x_k - L| \ge \varepsilon\}| = 0 \tag{2.1}$$

yani $h.h.k.$ için $|x_k - L| < \varepsilon$ ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. Burada küme sembolü dışındaki dikey çizgiler kümenin eleman sayısını gösteriyor. $x = (x_k)$ dizisinin L'ye istatistiksel yakınsak ise $S - \lim x = L$ veya $x_k \to L\,(S)$ yazılır [4] .

İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S ile gösterilir. $L = 0$ olması halinde sıfıra istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S_0 ile gösterilir. Buna göre,

$$S = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \le n : |x_k - L| \ge \varepsilon\}| = 0, \text{her } \varepsilon > 0 \text{ ve en az bir } L \text{ için} \right\}$$

dir. Buradan yakınsak her dizinin istatistiksel yakınsak olduğu görülür. Fakat istatistiksel yakınsak her dizi yakınsak olmak zorunda değildir. Gerçekten,

$$\begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2, m = 1, 2, 3, \ldots \\ 1, & k \ne m^2, m = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini gözönüne alalım. $x = (x_k)$ dizisi $1'$ e istatistiksel yakınsaktır fakat sınırlı olmadığından yakınsak değildir. Sınırlı bir dizi de istatistiksel yakınsak olmayabilir. Bunun için,

$$x = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$$

dizisi gözönüne alınırsa $x = (x_k)$ dizisinin sınırlı ancak istatistiksel yakınsak olmadığı görülür.

İstatistiksel yakınsak bir dizinin istatistiksel limiti tektir, yani $S - \lim x = L_1, S - \lim x = L_2$ ise $L_1 = L_2$ dir [4] .

2.1.1.5 Teorem: $x = (x_k)\,, y = (y_k)$ istatistiksel yakınsak diziler ve a herhangi bir reel sayı olsun. Bu takdirde,

$i)$ $x = (x_k)$ dizisi L_1 sayısına istatistiksel yakınsak ise $(a x_k)$ dizisi aL_1 sayısına istatistiksel yakınsaktır.

$ii)$ $x = (x_k)$ dizisi L_1 sayısına istatistiksel yakınsak ve $y = (y_k)$ dizisi L_2 sayısına istatistiksel yakınsak ise $(x_k + y_k)$ dizisi $L_1 + L_2$ sayısına istatistiksel yakınsaktır [3] .

2.1.1.6 Tanım: $\varepsilon > 0$ olsun. $h.h.k.$ için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa, yani

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir [20].

2.1.1.7 Teorem: Bir $x = (x_k)$ dizisi istatistiksel yakınsak ise istatistiksel Cauchy dizisidir [20].

2.1.1.8 Tanım: Λ ile pozitif sayıların $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$, $\lambda_1 = 1$ özelliğini sağlayan sonsuza giden ve azalmayan $\lambda = (\lambda_n)$ dizilerinin kümesini gösterelim. $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere,

$\lambda \in \Lambda$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L'ye $\lambda-$ istatistiksel yakınsaktır veya L'ye $S_\lambda-$ yakınsaktır denir. Bu durumda $S_\lambda - \lim x = L$ veya $x_k \to L\,(S_\lambda)$ yazılır [32].

2.1.1.9 Tanım: $k_0 = 0$, $r \to \infty$ iken $h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$ olacak şekilde $\theta = \{k_r\}$ artan tamsayı dizisine lacunary dizisi denir. $q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}}$ olarak alınacaktır.

$I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ve θ bir lacunary dizisi olmak üzere $\forall\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise x sayı dizisi L'ye lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $S_\theta - \lim x = L$ veya $x_k \to L\,(S_\theta)$ ile gösterilir.

$$S_\theta = \{x : \text{ bazı } L \text{ için, } S_\theta - \lim x = L\}$$

olarak tanımlanır [7].

2.1.2 İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli Cesaro Toplanabilirlik

2.1.2.1 Tanım: $x=(x_k)$ kompleks sayıların bir dizisi olsun.

$$\lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L'ye Cesaro toplanabilirdir denir. Cesaro toplanabilir dizilerin cümlesi σ_1 ile gösterilecektir. Buna göre,

$$\sigma_1 = \left\{ x=(x_k) : \lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (x_k - L) = 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

dir. Eğer x dizisi L'ye Cesaro toplanabilir ise $\sigma_1 - \lim x = L$ ile gösterilir $[3]$.

2.1.2.2 Teorem: $x=(x_k)$ dizisi için $\lim x = L$ ise $\sigma_1 - \lim x = L$ dir $[3]$.

Bu teoremin tersinin doğru olmadığını göstermek için $(x_n) = (1+(-1)^n)$ dizisini gözönüne alalım. Bu dizi $1'$ e Cesaro toplanabilirdir fakat yakınsak değildir.

2.1.2.3 Tanım: $x=(x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $p>0$ reel bir sayı olsun. Eğer,

$$\lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L'ye kuvvetli $p-$Cesaro toplanabilirdir denir. Bu durumda $\omega_p - \lim x = L$ yazılır. Kuvvetli $p-$Cesaro yakınsak dizilerin cümlesi ω_p ile gösterilecektir. Yani,

$$\omega_p = \left\{ x=(x_k) : \lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p = 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

dir $[5]$.

2.1.2.4 Teorem: $0<p<\infty$ olsun. Bu taktirde

$i)$ $\omega_p - \lim x = L$ ise $S - \lim x = L$ dir.

$ii)$ $S - \lim x = L$ ve $x \in l_\infty$ ise $\omega_p - \lim x = L$ dir $[5]$.

2.2 Fark Dizi Uzayları

2.2.1 Fark Dizi Uzaylarına Giriş

Fark dizi uzayları kavramı ilk olarak H. Kızmaz [16] tarafından tanımlandı.1981 yılında Kızmaz,$x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $\Delta x = (\Delta x_k) = (x_k - x_{k+1})\,, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} l_\infty(\Delta) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in l_\infty\}\,, \\ c(\Delta) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in c\}\,, \\ c_0(\Delta) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in c_0\}\,, \end{aligned}$$

ile fark dizi uzaylarını tanımladı. Bu uzayların,

$$\|x\|_\Delta = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$$

normu ile birer Banach uzayı olduklarını gösterdi.

Et ve Çolak [30] , $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \Delta^0 x &= (x_k)\,,\ \Delta x = (x_k - x_{k+1})\,, \\ \Delta^m x &= \left(\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}\right)\,, \\ \Delta^m x_k &= \sum_{i=1}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} x_{k+i} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} l_\infty(\Delta^m) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in l_\infty\} \\ c(\Delta^m) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c\} \\ c_0(\Delta^m) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c_0\} \end{aligned}$$

dizi uzaylarını çalıştı. Bu uzayların

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^{m} |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty$$

normu ile bir BK uzayı olduklarını göstermişlerdir.

Daha sonra Et ve Nuray [26] X herhangi bir dizi uzayı olmak üzere fark dizi uzaylarını genelleştirerek bu uzayların çeşitli özelliklerini incelemişlerdir.

2.2.1.1 Teorem: Eğer X bir lineer uzay ise $X(\Delta^m)$' de bir lineer uzaydır [26] .

2.2.1.2 Teorem: Eğer $X \subset Y$ ise $X(\Delta^m) \subset Y(\Delta^m)$'dir [26] .

2.2.1.3 Teorem: X bir lineer uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu takdirde A konveks ise $A(\Delta^m)$ uzayı $X(\Delta^m)$ uzayına konvekstir [29] .

2.2.1.4 Teorem: Eğer X lineer uzayı$\|.\|$ normu ile bir Banach uzayı ise $X(\Delta^m)$ uzayı da

$$\|x\|_{\Delta} = \sum_{i=1}^{m} |x_i| + \|\Delta^m x\|$$

normu ile bir Banach uzayıdır [26] .

2.3 Çift İndisli Dizilerde Yakınsaklık

2.3.1 Tanım: $x = (x_{jk})_{j,k\in\mathbb{N}}$ bir çift indisli dizi olsun. Eğer $j \to \infty$ ve $k \to \infty$ iken $x_{jk} \to L$ olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_{jk})_{j,k\in\mathbb{N}}$ dizisine Pringsheim anlamında yakınsaktır denir. Bu durumda,

$$\lim_{j,k\to\infty} x_{jk} = L$$

olarak yazarız. Bir çift indisli dizinin yakınsaklığından Pringsheim anlamındaki yakınsaklığını kastedeceğiz [23] .

Açıkça $x = (x_{jk})$ çift indisli dizisinin Pringsheim anlamında yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ vardır öyle ki bütün $j, k \geq n_0$ için,

$$|x_{jk} - L| < \varepsilon$$

dır. L limitine çift limit veya x'in Pringsheim limiti denir. [23]

Yakınsak her dizi sınırlı olmasına rağmen $P-$yakınsak bir çift indisli dizinin sınırlı olması gerekmez. Örneğin genel terimi,

$$x_{jk} = \begin{cases} 1, & j = 1 \text{ ise} \\ j, & k = 2 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $x = (x_{jk})$ dizisi için $P - \lim = 0$ fakat bu dizi sınırlı değildir.

2.3.2 Tanım: $x = (x_{jk})_{j,k\in\mathbb{N}}$ bir çift indisli dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $p, q, j, k \geq n_0$ olduğunda,

$$|x_{pq} - x_{jk}| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $x = (x_{jk})$ çift indisli dizisine Cauchy dizisi denir [23] .

2.3.3 Teorem: Kompleks terimli (x_{jk}) çift indisli dizisinin Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart yakınsak olmasıdır [23] .

2.3.4 Tanım: $A \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ pozitif tamsayılar kümesinin bir alt kümesi olsun. Bu durumda $\left(\frac{|A(n,m)|}{nm}\right)$ çift indisli dizisi Pringsheim anlamında bir limite sahip ise, A kümesinin bir çift doğal yoğunluğa sahip olduğu söylenir ve

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{|A(n,m)|}{nm} = \delta_2(A)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $A(n,m) = \{(j,k), j \leq n \text{ ve } k \leq m : (j,k) \in A\}$ ve $|A(n,m)|$, $A \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesinin eleman sayısını gösterir [6].

Ayrıca,

$$\delta_2(A^c) = \delta_2(\mathbb{N}\times\mathbb{N} - A) = 1 - \delta_2(A)$$

olduğu açıktır. Aşikârdır ki $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$'nin tüm sonlu alt kümeleri sıfır çift doğal yoğunluğa sahiptir. Bununla birlikte bazı sonsuz alt kümeleri de sıfır yoğunlukludur.

2.3.5 Örnek:

$$A = \{(j,k) : j \in [3^p, 3^p + p) \text{ ve } k \in [3^q, 3^q + q) \quad p, q = 1, 2, \ldots\}$$

kümesi sıfır çift doğal yoğunluğa sahiptir.

Burada özellikle sıfır çift doğal yoğunluğa sahip $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$'nin bir alt kümesi ile ilgileneceğiz.

2.3.6 Tanım: $x = (x_{jk})$ çift indisli dizisi sıfır yoğunluklu cümle hariç diğer bütün(j,k)'lar için bir P özelliğini sağlıyorsa, (x_{jk}) dizisi hemen hemen her (j,k) için P özelliğini sağlıyor denir ve $h.h.\,(j,k)$ şeklinde gösterilir [6].

2.3.7 Tanım: $x = (x_{jk})$ reel terimli bir çift indisli dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için;

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{nm} |\{(j,k), j \leq n \text{ ve } k \leq m : |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

yani $h.h.\,(j,k)$ için;

$$|x_{jk} - L| < \varepsilon$$

ise $x = (x_{jk})$ çift indisli dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir.

Bu durumda $st_2 - \lim\limits_{j,k\to\infty} x_{jk} = L$ şeklinde yazılır [6].

2.3.8 Tanım: $x = (x_{jk})$ bir çift indisli dizi olsun. Eğer

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} x_{jk} = L$$

ise $x = (x_{jk})$ dizisi L sayısına Cesaro toplanabilirdir denir [8].

2.3.9 Tanım: $x = (x_{jk})$ bir çift indisli dizi ve p de bir pozitif reel sayı olsun. Eğer

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} |x_{jk} - L|^p = 0$$

ise $x=(x_{jk})$ çift indisli dizisi L sayısına kuvvetli $p-$Cesaro yakınsaktır denir [6].

İstatistiksel yakınsaklık, kuvvetli $p-$Cesaro yakınsaklığı gerektirir fakat bunun tersi doğru değildir. Aşağıdaki örnek bunun tersinin doğru olmadığını gösterir.

2.3.10 Örnek: $x=(x_{jk})$ çift indisli dizisi

$$x_{jk}=\begin{cases} k, \ j=1 \text{ her } k \text{ için} \\ j, \ k=1 \text{ her } j \text{ için} \\ 0, \ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Burada

$$\lim_{j,k\to\infty} x_{jk}=0$$

fakat

$$\lim_{n,m\to\infty}\frac{1}{nm}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}x_{jk}=\lim_{n,m\to\infty}\frac{1}{nm}\frac{1}{2}\left(m^2+n^2+m+n-2\right)$$

ifadesi sonlu bir limite sahip değildir. Bu yüzden $x=(x_{jk})$ dizisi Cesaro yakınsak değildir. Üstelik Kuvvetli $p-$Cesaro yakınsak da değildir. Fakat

$$\lim_{n,m\to\infty}\frac{1}{nm}\left|\{(j,k):|x_{jk}-0|\geq\varepsilon\}\right|=\lim_{n,m\to\infty}\frac{m+n-1}{nm}=0$$

dır. Yani $x=(x_{jk})$ dizisi 0'a istatistiksel yakınsaktır [6].

2.4 Reel Değerli Çift İndisli Fonksiyon Dizilerinde Noktasal, Düzgün Ve İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde terimleri reel değerli olan $\{f_{jk}\}$ çift indisli dizileri ile çalışacağız. Elemanları fonksiyonlar olan çift indisli diziler, tek indisli reel değerli fonksiyon dizilerine benzer şekilde tanımlanır.

Tek indisli fonksiyon dizilerinde noktasal ve düzgün istatistiksel yakınsaklık kavramı, Gökhan [15],Güngör [33], Duman [31] tarafından verildi.

2.4.1 Noktasal Ve Düzgün Yakınsaklık

2.4.1.1 Tanım: $\{f_{jk}\}$ fonksiyonların bir çift indisli dizisi ve $S\subset\mathbb{R}$ olsun. Her $x\in S$ ve her $\varepsilon>0$ için $j,k>N$ olduğunda

$$|f_{jk}(x)-f(x)|<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $N(x,\varepsilon)$ pozitif tamsayısı varsa, $\{f_{jk}\}$ çift indisli dizisi f'ye noktasal yakınsaktır denir. Sembolik olarak $\lim_{j,k\to\infty} f_{jk}(x) = f(x)$ veya $f_{jk} \to f$ şeklinde gösterilir.

f fonksiyonuna, $\{f_{jk}\}$ dizisinin çift limit fonksiyonu veya Pringsheim limit fonksiyonu denir. Bu durumda $\{f_{jk}\}$ dizisinin S kümesi üzerinde f'ye noktasal yakınsak olduğunu söyleriz [25].

2.4.1.2 Teorem: $\{f_{jk}\}$, S kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir çift indisli dizisi olsun. S kümesi üzerindeki Pringsheim limit

$$\lim_{j,k\to\infty} f_{jk}(x) = f(x)$$

ise her $j,k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ kesin artan fonksiyonlar olmak üzere S kümesi üzerinde

$$\lim_{r\to\infty} f_{j(r),k(r)}(x) = f(x)$$

dir [25].

2.4.1.3 Tanım: $\{f_{jk}\}$, bir S kümesi üzerinde f'ye düzgün yakınsak fonksiyonların bir dizisi ise, her $\varepsilon > 0$ için bir $N = (N(\varepsilon))$ sayısı vardır öyle ki $j,k > N$ ve S kümesi üzerindeki bütün x'ler için

$$|f_{jk}(x) - f(x)| < \varepsilon$$

dır. S kümesi üzerindeki düzgünlük $\lim_{j,k\to\infty} f_{jk}(x) = f(x)$ veya $f_{jk} \to f$ şeklinde gösterilir [25].

Aşağıdaki teorem herhangi bir $\{f_{jk}\}$ dizisinin düzgün yakınsak olup olmadığı hakkında bilgi verecektir.

2.4.1.4 Teorem: $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ üzerindeki sürekli fonksiyonlar f ve f_{jk} $(j,k = 1,2,3,\ldots)$ olsun. Bu taktirde

$$\lim_{j,k\to\infty} f_{jk}(x) = f(x)$$

I üzerinde düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart $c_{jk} = \max_{x\in I} |f_{jk}(x) - f(x)|$ olmak üzere

$$\lim_{j,k\to\infty} c_{jk} = 0$$

olmasıdır [25].

İspat: Kabul edelim ki I üzerinde

$$\lim_{j,k\to\infty} f_{jk}(x) = f(x)$$

düzgün yakınsaktır. her $j, k \in \mathbb{N}$ için $|f_{jk}(x) - f(x)|, I$ üzerinde sürekli olduğundan en az bir $x_{jk} \in I$ noktasında mutlak maksimum değere sahiptir. Yani

$$c_{11} = |f_{11}(x_{11}) - f(x_{11})|, \; c_{21} = |f_{21}(x_{21}) - f(x_{21})|, \ldots$$

olacak şekilde $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1k}, \ldots, x_{21}, \ldots, x_{jk}, \ldots \in I$ mevcuttur. Böylece

$$c_{jk} = |f_{jk}(x) - f(x_{jk})|, \; j, k = 1, 2, 3, \ldots$$

yazabiliriz. Düzgün yakınsaklığın tanımından her $\varepsilon > 0$ ve bütün $j, k > N(\varepsilon)$ için

$$|f_{jk}(x) - f(x_{jk})| < \varepsilon$$

dır. Dolayısıyla

$$\lim_{j,k \to \infty} c_{jk} = 0$$

dır.

Açıkça S kümesi üzerindeki aynı f limitine sahip düzgün yakınsaklık noktasal yakınsaklığı gerektirir. Aşağıdaki örnek bunun tersinin doğru olmadığını gösterir.

2.4.1.5 Örnek:

$$f_{jk}(x) = \frac{j^2 k^2 x}{1 + j^3 k^3 x^2} \qquad x \in (0, 1)$$

$\{f_{jk}\}, f = 0$'a noktasal yakınsaktır. Fakat $(0, 1)$ aralığında düzgün yakınsak değildir. Çünkü

$$\lim_{j,k \to \infty} c_{jk} = \lim_{j,k \to \infty} \frac{\sqrt{jk}}{2}$$

yakınsak değildir [25].

2.4.2 Çift İndisli Fonksiyon Dizilerinde İstatistiksel Yakınsaklık

2.4.2.1 Tanım: Bir S kümesi üzerinde $\{f_{jk}\}$ fonksiyonların bir çift indisli dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her bir (sabit) $x \in S$ için

$$\lim_{n,m \to \infty} \frac{1}{nm} \left| \{(j, k), j \leq n \text{ ve } k \leq m : |f_{jk}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \right| = 0$$

ise $\{f_{jk}\}$ çift indisli fonksiyon dizisi f'ye noktasal istatistiksel yakınsaktır denir [25].

Yani her bir (sabit) $x \in S$ ve $h.h.\,(j, k)$ için

$$|f_{jk}(x) - f(x)| < \varepsilon$$

dır. Bu durumda S kümesi üzerinde $st_2 - \lim f_{jk}(x) = f(x)$ veya $f_{jk} \overset{st_2}{\to} f$ yazarız. f fonksiyonuna $\{f_{jk}\}$ fonksiyon dizisinin çift istatistiksel limiti veya Pringsheim istatistiksel limiti denir. Açıktır ki S kümesi üzerinde $\lim\limits_{j,k\to\infty} f_{jk}(x) = f(x)$ ise $st_2 - \lim f_{jk}(x) = f(x)$ dir. Fakat bunu tersi doğru değildir.

2.4.2.2 Örnek: $x \in \mathbb{R} - [1,1]$ olmak üzere

$$f_{jk}(x) = \begin{cases} (-x)^{jk}, \ j \in [3^p, 3^p + p) \text{ ve } k \in [3^q, 3^q + q) \ p, q = 1, 2, 3, \ldots \\ \quad 0, \text{ diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Her bir (sabit) $x \in \mathbb{R} - [1,1]$, $j, k = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{nm} \left|\{(j,k), j \leq n \text{ ve } k \leq m : |f_{jk}(x) - 0| \geq \varepsilon\}\right| \leq \frac{pq(p+1)(q+1)}{4.3^{p+q}} \to 0$$

dır. Sonuç olarak

$$st_2 - \lim f_{jk}(x) = 0$$

dır. Fakat $\lim\limits_{j,k\to\infty} f_{jk}(x)$ mevcut değildir [25].

2.4.2.3 Teorem: $\{f_{jk}\}$ ve $\{g_{jk}\}$, S kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların iki çift indisli dizisi olsun: Eğer S kümesi üzerinde $st_2 - \lim f_{jk}(x) = f(x)$ ve $st_2 - \lim g_{jk}(x) = g(x)$ ise $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$st_2 - \lim(\alpha f_{jk}(x) + \beta g_{jk}(x)) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

dir [25].

İspat: Her bir $x \in S$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} & \lim_{j,k\to\infty} |\alpha f_{jk}(x) + \beta g_{jk}(x) - (\alpha f(x) + \beta g(x))| \\ = & \lim_{j,k\to\infty} |\alpha (f_{jk}(x) - f(x)) + \beta (g_{jk}(x) - g(x))| \\ \leq & \lim_{j,k\to\infty} |\alpha| |f_{jk}(x) - f(x)| + \lim_{j,k\to\infty} |\beta| |g_{jk}(x) - g(x)| \to 0 \end{aligned}$$

dır. Sonuç olarak

$$st_2 - \lim(\alpha f_{jk}(x) + \beta g_{jk}(x)) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

dir.

2.4.2.4 Teorem: S kümesi üzerinde $\{f_{jk}\}$ çift indisli fonksiyon dizisi bir $f(x)$ fonksiyonuna istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart her bir (sabit) $x \in S$ için

$$K_x = \{\{(j,k)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad j, k = 1, 2, 3, \ldots\}$$

alt kümesi vardır öyle ki

$$\delta_2 (K_x) = 1 \text{ ve } \lim_{\substack{j,k\to\infty \\ (j,k)\in K_x}} f_{jk}(x) = f(x)$$

dir [25] .

2.4.2.5 Sonuç: Eğer S kümesi üzerinde $st_2 - \lim_{j,k\to\infty} f_{jk}(x) = f(x)$ ise bir $\{g_{jk}\}$ dizisi vardır öyle ki her bir (sabit) $x \in S$ için

$$\lim_{j,k\to\infty} g_{jk}(x) = f(x) \text{ ve } \delta_2 \{(j,k) : f_{jk}(x) = g_{jk}(x)\} = 1$$

dir. Yani her bir (sabit) $x \in S$ ve $h.h.\,(j,k)$ için

$$f_{jk}(x) = g_{jk}(x)$$

dir [25] .

2.4.2.6 Tanım: Bir S kümesi üzerinde $\{f_{jk}\}$ çift indisli fonksiyon dizisi her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in S$ için

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{nm} \left|\{(j,k), j \leq n \text{ ve } k \leq m : |f_{jk}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

ise $\{f_{jk}\}$ çift indisli fonksiyon dizisi f'ye düzgün istatistiksel yakınsaktır denir. [25]

Yani her $x \in S$ ve $h.h.\,(j,k)$ için

$$|f_{jk}(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{2.4}$$

dur. Bu durumda S kümesi üzerindeki düzgün yakınsaklık,

$$st_2 - \lim_{j,k\to\infty} f_{jk}(x) = f(x) \text{ veya } f_{jk} \overset{st_2}{\rightarrow} f$$

şeklinde gösterilir [25] .

Teorem 2.4.2.3'ten düzgün istatistiksel yakınsaklığın tanımı şu şekilde verilebilir.

"S kümesi üzerinde $f_{jk} \overset{st_2}{\rightarrow} f$'ye düzgün istatistiksel yakınsaktır$\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon > 0$, her $x \in S$ için, $\exists K \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}, \delta_2(K) = 1$ ve $\exists (n_0, m_0) \in K$ vardır $n_0 = n_0(\varepsilon), m_0 = m_0(\varepsilon)$, öyle ki $\forall j > n_0, k > m_0$ ve $(j,k) \in K$ için

$$|f_{jk}(x) - f(x)| < \varepsilon$$

dır."

2.4.2.7 Teorem: f ve f_{jk}, $j,k=1,2,3,\ldots$, $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$ üzerindeki sürekli fonksiyonlar olsun. I üzerinde $st_2-\lim\limits_{j,k\to\infty} f_{jk}(x)=f(x)$'e düzgün istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$c_{jk}=\max_{x\in I}|f_{jk}(x)-f(x)|$$

olmak üzere $st_2-\lim\limits_{j,k\to\infty} c_{jk}=0$ olmasıdır $[25]$.

İspat: İspat teorem 2.5.2.4'e benzer şekilde yapılır. Açık olarak tüm sonlu (j,k)'lar için (2.4) eşitsizliği gerçeklenir. S kümesi üzerindeki düzgün yakınsaklık

$$\lim_{j,k\to\infty} f_{jk}(x)=f(x)$$

S kümesi üzerindeki istatistiksel yakınsaklığı

$$st_2-\lim_{j,k\to\infty} f_{jk}(x)=f(x)$$

gerektirir. Fakat bunun tersi doğru değildir.

2.4.2.8 Örnek:

$$f_{jk}(x)=\begin{cases} 1, \text{ Eğer } j=p^2 \text{ ve } k=q^2\ p,q=1,2,3,\ldots \\ \left(x-\frac{1}{jk}\right)^2, \text{ diğer durumlarda} \end{cases}$$

olsun. $x\in[-1,1]$, $j,k=1,2,3,\ldots$ olmak üzere $\{f_{jk}\}$, $f(x)=x^2$'ye düzgün istatistiksel yakınsaktır. Çünkü

$$st_2-\lim_{j,k\to\infty} c_{jk}=0$$

dır $[25]$.

Burada

$$c_{jk}=\max_{x\in[-1,1]}\left|f_{jk}(x)-x^2\right|=\begin{cases} 1, \text{ Eğer } j=p^2 \text{ ve } k=q^2\ p,q=1,2,3,\ldots \text{ ise} \\ \frac{2}{jk}+\frac{1}{j^2k^2}, \text{ diğer durumlarda} \end{cases}$$

dır. Fakat $[-1,1]$ aralığında $\{f_{jk}\}$ düzgün yakınsak değildir. Çünkü $\lim\limits_{j,k\to\infty} c_{jk}$ mevcut değildir.

Üstelik S kümesi üzerinde düzgün istatistiksel yakınsaklık, aynı f limitine noktasal istatistiksel yakınsaklığı gerektirir. Fakat tersi doğru değildir. Bunun için aşağıdaki örnek verilebilir.

2.4.2.9 Örnek:

$$f_{jk}(x)=\begin{cases} 1, \ j\in[3^p,3^p+p), \ p=1,2,3,\ldots k\in\mathbb{N} \\ \frac{k^2x}{1+k^3x^2}, \text{ diğer durumlarda} \end{cases}$$

olsun. $x \in (0,1)\,, j,k=1,2,3,\ldots$ olmak üzere $\{f_{jk}\}$ çift indisli fonksiyon dizisi, $f(x)=0$'a noktasal istatistiksel yakınsaktır. Fakat $\{f_{jk}\}$, teorem 2.5.2.7'ye göre düzgün istatistiksel yakınsak değildir. Çünkü

$$c_{jk}=\max_{x\in(0,1)}|f_{jk}(x)-0|=\begin{cases} 1, & j\in[3^p,3^p+p)\,,\ p=1,2,3,\ldots\ k\in\mathbb{N} \\ \frac{\sqrt{k}}{2}, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

ve $st_2-\lim\limits_{j,k\to\infty} c_{jk}$ mevcut değildir [25].

2.4.2.10 Sonuç: S kümesi üzerinde

i) $\lim\limits_{j,k\to\infty} f_{jk}(x)=f(x)$'e düzgün yakınsank $\Rightarrow \lim\limits_{j,k\to\infty} f_{jk}(x)=f(x)\Rightarrow st_2-\lim\limits_{j,k\to\infty} f_{jk}(x)=f(x)$ dir.

ii) $\lim\limits_{j,k\to\infty} f_{jk}(x)=f(x)$ düzgün yakınsak $\Rightarrow st_2-\lim\limits_{j,k\to\infty} f_{jk}(x)=f(x)$ düzgün istatistiksel yakınsak ise $\Rightarrow st_2-\lim\limits_{j,k\to\infty} f_{jk}(x)=f(x)$ dir [25].

2.4.2.11 Tanım: Bir S kümesi üzerinde $\{f_{jk}\}$ bir çift indisli fonksiyon dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için $N=(N(\varepsilon))$ ve $M=(M(\varepsilon))$ sayıları mevcut öyle ki $h.h.\,(j,k)$ ve her bir (sabit) $x\in S$ için

$$|f_{jk}(x)-f_{NM}(x)|<\varepsilon$$

ise $\{f_{jk}\}$ çift indisli dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir. Yani, her bir (sabit) $x\in S$ için

$$\lim_{n,m\to\infty}\frac{1}{nm}\left|\{(j,k)\,, j\le n \text{ ve } k\le m : |f_{jk}(x)-f_{NM}(x)|\ge\varepsilon\}\right|=0$$

dır [25].

2.4.2.12 Teorem: S kümesi üzerinde $\{f_{jk}\}$ bir çift indisli fonksiyon dizisi olsun. $\{f_{jk}\}$, noktasal istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\{f_{jk}\}$, istatistiksel Cauchy dizisi olmasıdır [25].

2.4.2.13 Teorem: $\{f_{jk}\}, S$ kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir çift indisli dizisi olsun. S kümesi üzerinde aşağıdaki ifadeler denktir.

i) $\{f_{jk}\}$, $f(x)$'e noktasal istatistiksel yakınsaktır.

ii) $\{f_{jk}\}$ istatistiksel Cauchy dizisidir.

iii) $\{f_{jk}\}$ dizisinin bir $\{g_{jk}\}$ alt dizisi vardır öyle ki $\lim_{j,k\to\infty} g_{jk}(x)=f(x)$ dir [25].

2.5 Reel Değerli Çift İndisli Fonksiyon Dizilerinde Kuvvetli Cesaro Yakınsaklık (λ,μ) – İstatistiksel Yakınsaklık Ve Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde reel değerli çift indisli fonksiyon dizileri için kuvvetli çift Cesaro yakınsaklığı tanımlayacağız. Ayrıca reel değerli çift indisli fonksiyon dizileri için $(\lambda, \mu)-$ istatistiksel yakınsaklık ve çift lacunary istatistiksel yakınsaklık tanımını vereceğiz.

2.5.1 Tanım: $\{f_{jk}\}$, her bir $j,k \in \mathbb{N}$ için f_{jk} fonksiyonları bir $S \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, reel değerli fonksiyonların bir çift indisli dizisi olsun. Eğer her bir $x \in S$ için

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} |f_{jk}(x) - f(x)| = 0$$

olacak şekilde $f(x)$ fonksiyonu varsa $\{f_{jk}\}$ çift indisli fonksiyon dizisi f'ye S üzerinde kuvvetli çift Cesaro yakınsaktır denir.

2.5.2 Örnek: $f_{jk}(x) = \frac{x}{2^{j+k}}, x \in \mathbb{R}$ olarak tanımlanan $\{f_{jk}\}$ çift indisli dizisi $S = \mathbb{R}$ üzerinde $f(x) = 0$ fonksiyonuna kuvvetli çift Cesaro yakınsaktır.

2.5.3 Teorem: Eğer S üzerinde tanımlı sınırlı bir $\{f_{jk}\}$ çift indisli dizisi f'ye Pringsheim anlamında yakınsak ise $\{f_{jk}\}$ çift indisli dizisi f'ye kuvvetli çift Cesaro yakınsaktır.

Yukarıdaki teoremin tersi doğru değildir. Yani $\{f_{jk}\}$ çift indisli fonksiyon dizisi f'ye S üzerinde kuvvetli çift Cesaro yakınsak olması $\{f_{jk}\}$, çift indisli fonksiyon dizisinin f'ye S üzerinde yakınsak olmasını gerektirmez. Bunu aşağıdaki örnek ile gösterelim.

2.5.4 Örnek:

$$f_{jk}(x) = \begin{cases} x, \ n,m = 1,2,3,\ldots, \ i \text{ çift olmak üzere } j = 10^n + i \quad k = 10^m + i \\ -x, \ n,m = 1,2,3,\ldots, \ i \text{ tek olmak üzere } j = 10^n + i \quad k = 10^m + i \\ 0, \ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olsun. Bu çift indisli fonksiyon dizisi için $\lim_{j,k\to\infty} f_{jk}(x)$ mevcut değildir. Fakat bu dizi $x \in \mathbb{R}$ üzerinde $f(x) = 0$'a kuvvetli çift Cesaro yakınsaktır.

2.5.1 Çift Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

2.5.1.1 Tanım: $\theta = \{(k,r)\}$ çift indisli dizi olsun. Bununla birlikte

$$k_0 = 0 \text{ olmak üzere } r \to \infty \text{ iken } h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$$

ve

$$l_0 = 0 \text{ olmak üzere } s \to \infty \text{ iken } \overline{h_s} = l_s - l_{s-1} \to \infty$$

olacak şekilde tamsayıların iki artan dizisi var ise $\theta = \{(k,r)\}$ çift indisli dizisine çift lacunary dizisi denir. θ tarafından belirtilen aralıklar

$$\begin{aligned} I_r &= \{(k) : k_{r-1} < k \leq k_r\} \\ I_s &= \{(l) : l_{s-1} < l \leq l_s\} \\ I_{r,s} &= \{(k,l) : k_{r-1} < k \leq k_r \text{ ve } l_{s-1} < l \leq l_s\} \end{aligned}$$

şeklindedir. Ayrıca

$$q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}},\ \overline{q_s} = \frac{l_s}{l_{s-1}} \text{ ve } q_{r,s} = q_r \overline{q_s}$$

dir. Bütün çift lacunary dizilerinin kümesi $N_{\theta_{r,s}}$ ile gösterilir [14].

2.5.1.2 Tanım: $\theta = \{(j_r, k_s)\}$ bir çift lacunary dizisi olsun. x çift indisli dizisi için

$$P - \lim_{r,s} \frac{1}{h_{r,s}} \left| \{(j,k) \in I_{r,s} : |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_{jk})$ dizisi L'ye lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Bu yakınsaklık $S_\theta^2 - \lim x = L$ veya $x_{jk} \to L\,(S_\theta^2)$ ile gösterilir [14].

2.5.1.3 Tanım: $\theta = \{k_r\}$ pozitif tamsayıların artan bir lacunary dizisi olsun. Öyle ki

$$r \to \infty \text{ iken } h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$$

dir. Bütün r'ler için;

$$\begin{aligned}
I_1 &= \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : i,j < k_1\} \\
I_2 &= \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : i,j < k_2\} \diagdown I_1 \\
&\ \vdots \\
I_r &= \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : i,j < k_r\} \diagdown (I_{r-1} \cup I_{r-2} \cup \ldots \cup\ I_1)
\end{aligned}$$

olmak üzere $S = \{s_{ij}\}$ dizisi L'ye çift lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Öyle ki her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{|I_r|} \left| \{(i,j) \in I_r : |s_{ij} - L| \geq \varepsilon\} \right| = 0$$

dır. Bu durumda $s_{ij} \to L\,(S_\theta)$ yazılır [13].

2.5.1.4 Teorem: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olmak üzere $S = \{s_{ij}\}$ dizisi $s_{ij} \to L\,(S_\theta)$ koşulunu sağlaması için gerek ve yeter şart $A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dir. Öyle ki

$$\lim_{r\to\infty} \frac{|A \cap I_r|}{|I_r|} = 0$$

ve

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ Eğer } (i,j) \notin A \text{ ise} \\ 0, \text{ Eğer } (i,j) \in A \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere $S(x)$, L'ye düzgün yakınsak olmasıdır [13].

2.6 Reeel Değerli Çift İndisli Dizilerde α.Dereceden İstatistiksel Yakınsaklık

2.6.1 Tanım: $K \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ve $K(n,m)$ $i \leq n, j \leq m$ olacak şekilde K'daki (i,j)'lerin sayısı olsun. $K \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin alt asimptotik yoğunluğu

$$\underline{\delta}^2(K) = \liminf_{m,n} \frac{K(n,m)}{nm}$$

şeklinde tanımlanır [28].

2.6.2 Tanım: $\frac{K(n,m)}{nm}$ dizisi Pringsheim limite sahip ise o zaman K çift doğal yoğunluğa sahiptir denir. Çift doğal yoğunluğu

$$\delta^2(K) = \lim_{m,n} \frac{K(n,m)}{nm}$$

şeklinde tanımlanır [28].

Bu çalışmada $a,b,c,d \in (0,1]$ olmak üzere (a,b) yerine $\widetilde{\alpha}$ (c,d) yerine $\widetilde{\beta}$ yazacağız.

Bunların arasındaki durumları aşağıdaki gibi kabul edeceğiz [28].

$$\begin{aligned}
\widetilde{\alpha} &\preceq \widetilde{\beta} \Leftrightarrow a \leq c \text{ ve } b \leq d \\
\widetilde{\alpha} &\prec \widetilde{\beta} \Leftrightarrow a < c \text{ ve } b < d \\
\widetilde{\alpha} &\cong \widetilde{\beta} \Leftrightarrow a = c \text{ ve } b = d \\
\widetilde{\alpha} &\in (0,1] \Leftrightarrow a,b \in (0,1] \\
\widetilde{\beta} &\in (0,1] \Leftrightarrow c,d \in (0,1] \\
\widetilde{\alpha} &\cong 1 \text{ durumunda } a = b = 1 \\
\widetilde{\beta} &\cong 1 \text{ durumunda } c = d = 1 \\
\widetilde{\alpha} &\succ 1 \text{ durumunda } a > 1 \text{ ve } b > 1
\end{aligned}$$

$K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin $\widetilde{\alpha}$ yoğunluğu

$$\delta^2_{\widetilde{\alpha}}(K) = \lim_{m,n} \frac{K(n,m)}{n^a m^b}$$

şeklinde tanımlanır.

Herhangi bir $K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için $\delta^2(K) \leq 1$ olmasına rağmen $\delta^2_{\widetilde{\alpha}}(K) \geq 1$ veya limit mevcut olmayabilir. $\delta^2(K^c) = 1 - \delta^2(K)$ olmasına rağmen $\delta^2_{\widetilde{\alpha}}(K^c) = 1 - \delta^2_{\widetilde{\alpha}}(K)$ genelde sağlanmaz.

2.6.3 Tanım: $x = (x_{jk})$ çift indisli bir dizi ve $\widetilde{\alpha} \in (0,1]$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n,m} \frac{1}{n^a m^b} \left| \{(j,k) \;\; j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - l| \geq \varepsilon\} \right| = 0$$

olacak şekilde kompleks bir l sayısı varsa $x = (x_{jk})$ dizisi l'ye $\widetilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel yakınsaktır denir. Bu yakınsaklık $S_{\widetilde{\alpha}}^{2} - \lim_{j,k} x_{jk} = l$ şeklinde gösterilir. $\widetilde{\alpha}$.dereceden tüm istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesi $S_{\widetilde{\alpha}}^{2}$ ile gösterilir [28] .

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu çalışma için literatür taraması yapılarak ilgili kitap ve makalelerden faydalanıldı. İlk bölümde temel tanım ve teoremler verildi. İkinci bölümde istatistiksel yakınsaklık, doğal yoğunluk, kuvvetli Cesaro toplanabilirlik, fark dizileri, fark dizileri için α. dereceden istatistiksel yakınsaklık, çift indisli dizilerde yakınsaklık, reel değerli çift indisli fonksiyon dizilerinde noktasal, düzgün ve istatistiksel yakınsaklık reel değerli çift indisli fonksiyon dizilerinde Cesaro yakınsaklık ve lacunary istatistiksel yakınsaklık, reeel değerli çift indisli dizilerde α.dereceden istatistiksel yakınsaklık verildi ve konu ile ilgili örnekler incelendi. Dördüncü bölümde çift indisli fonksiyon dizilerinin genelleştirilmiş farklarının α. dereceden istatistiksel yakınsaklığı, $(\lambda, \mu)-$ istatistiksel yakınsaklığı ve lacunary istatistiksel yakınsaklığı verildi.

4. BULGULAR

4.1 Çift İndisli Fonksiyon Dizilerinin Farklarının α.Dereceden $\lambda-$ İstatistiksel Yakınsaklık

4.1.1 Tanım: Bir E kümesi üzerinde $\{f_{jk}\}$ bir çift indisli fonksiyon dizisi ve $\widetilde{\alpha} \in (0,1]$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in E$ için

$$(P) \lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{n^a m^b} \left|\left\{(j,k), j \leq n, k \leq m : \left|\Delta^r f_{jk} - f(x)\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

ise$\{f_{jk}\}$ çift indisli fonksiyon dizisi f'ye α. dereceden Δ^r-noktasal istatistiksel yakınsaktır denir. Yani her $x \in E$ ve $h.h.\,(j,k)\,(\widetilde{\alpha})$ için

$$\left|\Delta^r f_{jk}(x) - f(x)\right| < \varepsilon$$

dur. Bu durumda E kümesi üzerinde $S_2^{\widetilde{\alpha}} \xrightarrow{p} \lim \Delta^r f_{jk}(x) = f(x)$ veya $\Delta^r f_{jk} \xrightarrow{S_2^{\widetilde{\alpha}}(p)} f$ yazacağız. Tüm α. dereceden Δ^r-istatistiksel yakınsak çift indisli dizilerin kümesini $S_2^{\widetilde{\alpha}}(\Delta^r, f)$ ile göstereceğiz.

E kümesi üzerinde $\Delta^r f_{jk}$ fonksiyon dizisi f'ye yakınsak ise yani $\lim_{j,k\to\infty} \Delta^r f_{jk}(x) = f(x)$ ise $S_2^{\widetilde{\alpha}} - \lim \Delta^r f_{jk}(x) = f(x)$ dir. Fakat bunun tersi doğru değildir.

4.1.2 Örnek:

$$f_{jk}(x) = \begin{cases} 1, \ j,k = n^2 \\ \frac{j^2k^2x}{1+j^3k^3x^2}, \ j,k \neq n^2 \end{cases}$$

bu durumda

$$\Delta f_{jk}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{j^2(k+1)^2x}{1+j^3(k+1)^3x^2} - \frac{(j+1)^2k^2x}{1+(j+1)^3k^3x^2} + \frac{(j+1)^2(k+1)^2x}{1+(j+1)^3(k+1)^3x^2}, \ j,k = n^2 \\ \frac{j^2k^2x}{1+j^3k^3x^2} - \frac{j^2(k+1)^2x}{1+j^3(k+1)^3x^2} - \frac{(j+1)^2k^2x}{1+(j+1)^3k^3x^2} - 1, \ j,k = n^2-1 \\ \frac{j^2k^2x}{1+j^3k^3x^2} - \frac{j^2(k+1)^2x}{1+j^3(k+1)^3x^2} - \frac{(j+1)^2k^2x}{1+(j+1)^3k^3x^2} + \frac{(j+1)^2(k+1)^2x}{1+(j+1)^3(k+1)^3x^2}, \ j,k \neq n^2 \end{cases}$$

dizisini elde ederiz. Buradan $\widetilde{\alpha} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ için $S_2^{\widetilde{\beta}} - \lim \Delta f_{jk}(x) = 0$ fakat $\{\Delta f_{jk}\}$ dizisi yakınsak değildir.

4.1.3 Teorem: $\{f_{jk}\}$ ve $\{g_{jk}\}$ A üzerinde tanımlı iki çift indisli fonksiyon dizisi olsun. A üzerinde $S_2^{\widetilde{\alpha}} - \lim \Delta^r f_{jk}(x) = f(x)$ ve $S_2^{\widetilde{\alpha}} - \lim \Delta^r g_{jk}(x) = g(x)$ olsun.

$i) S_2^{\widetilde{\alpha}} - \lim \Delta^r f_{jk}(x) = f(x)$ ve $c \in \mathbb{R}$ ise $S_2^{\widetilde{\alpha}} - \lim \Delta^r c f_{jk}(x) = cf(x)$

$ii) S_2^{\widetilde{\alpha}} - \lim \Delta^r g_{jk}(x) = g(x)$ ve $S_2^{\widetilde{\alpha}} - \lim \Delta^r g_{jk}(x) = g(x)$ ise

$$S_2^{\widetilde{\alpha}} - \lim \Delta^r \left(f_{jk}(x) + g_{jk}(x)\right) = f(x) + g(x)$$

dir.

4.1.4 Teorem: $\widetilde{\alpha}$ ve $\widetilde{\beta} \in (0,1]$ ve $\widetilde{\alpha} \prec \widetilde{\beta}$ olsun. Bu taktirde $S_2^{\widetilde{\alpha}}(\Delta^r, f) \subseteq S_2^{\widetilde{\beta}}(\Delta^r, f)$ kapsaması kesindir.

İspat: $\widetilde{\alpha} = (a,b)$ ve $\widetilde{\beta} = (c,d)$ olsun. Bu taktirde $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^c m^d} \left|\left\{(j,k); j \le n, k \le m : \left|\Delta^r f_{jk}(x) - f(x)\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \\ \le \quad & \frac{1}{n^a m^b} \left|\left\{(j,k); j \le n, k \le m : \left|\Delta^r f_{jk}(x) - f(x)\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \end{aligned}$$

olduğundan $S_2^{\widetilde{\alpha}}(\Delta^r, f) \subseteq S_2^{\widetilde{\beta}}(\Delta^r, f)$ elde edilir.

Şimdi bu kapsamanın kesin olduğunu gösterelim. Bunun için f_{jk} çift indisli fonksiyon dizisini aşağıdaki gibi alalım.

$$f_{jk}(x) = \begin{cases} 1, \; j,k = n^2 \\ \frac{j^2 k^2 x}{1 + j^3 k^3 x^2}, \; j,k \neq n^2 \end{cases}$$

bu durumda

$$\Delta f_{jk}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{j^2 (k+1)^2 x}{1 + j^3 (k+1)^3 x^2} - \frac{(j+1)^2 k^2 x}{1 + (j+1)^3 k^3 x^2} + \frac{(j+1)^2 (k+1)^2 x}{1 + (j+1)^3 (k+1)^3 x^2}, \; j,k = n^2 \\ \frac{j^2 k^2 x}{1 + j^3 k^3 x^2} - \frac{j^2 (k+1)^2 x}{1 + j^3 (k+1)^3 x^2} - \frac{(j+1)^2 k^2 x}{1 + (j+1)^3 k^3 x^2} - 1, \; j,k = n^2 - 1 \\ \frac{j^2 k^2 x}{1 + j^3 k^3 x^2} - \frac{j^2 (k+1)^2 x}{1 + j^3 (k+1)^3 x^2} - \frac{(j+1)^2 k^2 x}{1 + (j+1)^3 k^3 x^2} + \frac{(j+1)^2 (k+1)^2 x}{1 + (j+1)^3 (k+1)^3 x^2}, \; j,k \neq n^2 \end{cases}$$

dizisini elde ederiz. Buradan $\widetilde{\beta} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ için $S_2^{\widetilde{\beta}} - \lim \Delta f_{jk}(x) = 0$ fakat $\widetilde{\alpha} \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ için $f(x) \notin S_2^{\widetilde{\alpha}}(\Delta^r, f)$'dir.

4.1.5 Tanım: $\widetilde{\alpha} \in (0,1]$ ve p pozitif reel sayı olsun. Bu durumda

$$\lim_{m,n \to \infty} \frac{1}{n^a m^b} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left|\Delta^r f_{jk}(x) - f(x)\right|^p = 0$$

olacak şekilde bir $f(x)$ fonksiyonu varsa $\{f_{jk}\}$ çift indisli fonksiyon dizisi $f(x)$ fonksiyonuna $\widetilde{\alpha}$. dereceden kuvvetli Δ_p-Cesáro toplanabilirdir denir.

$\widetilde{\alpha} = (a,b) = (1,1)$ olması halinde $\widetilde{\alpha}$. dereceden kuvvetli Δ_p-Cesáro toplanabilme, Δ_p-Cesáro toplanabilmeye indirgenir. Bütün $\widetilde{\alpha}$. dereceden kuvvetli Δ_p-Cesáro toplanabilir dizilerin kümesini $\omega^{\widetilde{\alpha}}(\Delta_p)$ ile göstereceğiz.

4.1.6 Teorem: $0 < \widetilde{\beta} \leq \widetilde{\gamma} \leq 1$ ve p pozitif bir reel sayı olsun. $\{f_{jk}\}$ çift indisli fonksiyon dizisi f fonksiyonuna $\widetilde{\beta}$. dereceden kuvvetli Δ_p $-$Cesáro toplanabilir ise bu takdirde bu dizi f fonksiyonuna $\widetilde{\gamma}$. dereceden kuvvetli Δ_p-Cesáro toplanabilirdir. Yani, $\omega^{\widetilde{\beta}}(\Delta, p) \subseteq \omega^{\widetilde{\gamma}}(\Delta, p)$'dir ve bu kapsama $\widetilde{\beta} \prec \widetilde{\gamma}$ olacak şekildeki bazı $\widetilde{\beta}$ ve $\widetilde{\gamma}$ için kesindir.

4.1.7 Tanım: (λ_m) ve (μ_n) pozitif reel sayıların azalmayan iki dizisi ve $m \to \infty$ $n \to \infty$ iken $\lambda_m \to \infty$, $\mu_n \to \infty$

$$\begin{aligned} \lambda_{m+1} &\leq \lambda_m + 1, \ \lambda_1 = 0 \\ \mu_{n+1} &\leq \mu_n + 1, \ \mu_1 = 0 \end{aligned}$$

olsun.

$K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pozitif tamsayıların iki-boyutlu kümesi olsun. K'nın (λ, μ) yoğunluğu

$\delta_{\lambda,\mu}(K) = (p) \lim\limits_{m,n} \dfrac{1}{\lambda_m \mu_n} \left|\{m - \lambda_m + 1 \leq j \leq m, \ n - \mu_n + 1 \leq k \leq n\} : (j,k) \in K\right|$ limiti vardır

şeklinde tanımlanır. $\lambda_m = m$, $\mu_n = n$ alınırsa (λ, μ) yoğunluklu doğal yoğunluğa indirgenir [33] .

4.1.8 Tanım: Genelleştirilmiş de la valee-pousin ortalaması

$$J_m = [m - \lambda_m + 1, m] \text{ ve } I_n \left[n - \mu_n + 1, n\right]$$

olmak üzere

$$t_{m,n}(x) = \frac{1}{\lambda_m \mu_n} \sum_{j \in J_m} \sum_{k \in I_n} x_{jk}$$

şeklinde tanımlanır [33] .

$x = (x_{jk})$ çift dizisi için $(p) \lim_{m,n} t_{m,n}(|x - l|) = 0$ ise (x_{jk}) dizisi l sayısına kuvvetli (V, λ, μ) toplanabilir denir. Kuvvetli (V, λ, μ) toplanabilir dizilerin kümesi $[V, \lambda, \mu]$ ile gösterilir.

4.1.9 Tanım: (x_{jk}) çift dizisine

$$E = \{j \in J_m, k \in I_n : |x_{jk} - l| \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere $\delta_{\lambda,\mu}(E) = 0$, yani her $\varepsilon > 0$ için

$$(P) - \lim_{m,n} \frac{1}{\lambda_m \mu_n} \left|\{j \in J_m, k \in I_n : |x_{jk} - l| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

ise (λ,μ) istatistiksel yakınsaktır denir. $(st_{\lambda,\mu}) - \lim x_{jk} = l$ yazacağız ve (λ,μ) istatistiksel yakınsak çift dizilerin kümesini $S^2_{(\lambda,\mu)}$ ile gösteririz [33].

4.1.10 Tanım: $\lambda = (\lambda_m)$ ve $\mu = (\mu_n) = \mu_n$ ∞'a giden pozitif reel sayıların azalmayan iki dizisi ve $0 \leq a < 1$, $0 \leq b < 1$

$$\begin{aligned} \lambda_{m+1} &\leq \lambda_m + 1,\ \lambda_1 = 0 \\ \mu_{n+1} &\leq \mu_n + 1,\ \mu_1 = 0 \end{aligned}$$

olsun. $A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pozitif tamsayıların iki-boyutlu bir kümesi olsun. A'nın $(\lambda,\mu)(\alpha)$ yoğunluğunu

$$\delta^{\alpha}_{(\lambda,\mu)}(A) = (P)\text{-}\lim_{m,n} \frac{1}{\lambda_m^a \mu_n^b} \left|\{m - \lambda_m + 1 \leq j \leq m,\ n - \mu_n + 1 \leq k \leq n : (j,k) \in A\}\right| \text{ limiti vardır}$$

şeklinde tanımlayacağız.

$\lambda_m = m$, $\mu_n = n$ alınırsa çift dizilerin $(\widetilde{\alpha})$ istatistiksel yakınsaklığı elde edilir. Her $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için

$$\frac{\lambda_m^{\widetilde{\alpha}}}{m^{\widetilde{\alpha}}} \leq 1 \text{ ve } \frac{\mu_n^{\widetilde{\alpha}}}{n^{\widetilde{\alpha}}} \leq 1$$

olduğundan

$$\delta_2^{\alpha}(A) \leq \delta^{\alpha}_{\lambda,\mu}(A)$$

elde ederiz.

4.1.11 Tanım: Bir E kümesi üzerinde $\{f_{jk}\}$ çift indisli fonksiyonların bir dizisi ve $\widetilde{\alpha} = (0,1]$ olsun.

$$A = \{j \in J_m, k \in I_n : |\Delta^r f_{jk} - f(x)| \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere $\delta^{\widetilde{\alpha}}_{(\lambda,\mu)}(A) = 0$ ise yani,

$\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in E$ için

$$(P) \lim_{m,n} \frac{1}{\lambda_m^a \mu_n^b} \left|\{j \in J_m, k \in I_n : |\Delta^r f_{jk}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

ise $\{f_{jk}\}$ dizisi f'ye $\widetilde{\alpha}$.dereceden $(\lambda,\mu)(\Delta^r)-$ istatistiksel yakınsaktır denir.

$\widetilde{\alpha}$. dereceden $(\lambda,\mu)(\Delta^r)-$ istatistiksel yakınsak çift indisli fonksiyon dizilerinin kümesini $S^{\widetilde{\alpha}}_{(\lambda,\mu)}(\Delta^r, f)$ ile göstereceğiz.

α. dereceden $(\lambda,\mu)(\Delta^r)-$ istatistiksel yakınsaklık $\widetilde{\alpha} > 1$ için iyi tanımlı değidir. Bunu göstermek için aşağıdaki örneği gözönüne alalım.

4.1.12 Örnek:

$$f_{jk}(x) = \begin{cases} x^{j+k}, \ j+k \neq 2n \\ 1, \ j+k = 2n \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım.

$$\Delta f_{jk}(x) = \begin{cases} 2 - 2x^{j+k+1}, \ j+k = 2n, \ n = 1,2,3,\ldots \ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ x^{j+k} + x^{j+k+2} - 2, \ j+k \neq 2n, \ n = 1,2,3,\ldots \ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

elde edilir. $\widetilde{\alpha} > 1$ ve $\lambda_n = n$, $\mu_n = m$ için

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^a \mu_n^b} \left|\left\{(j,k) \in J_m \times I_n : \left|\Delta f_{jk}(x) - \left(2 - 2x^{j+k+1}\right)\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^a \mu_n^b} \left|\left\{(j,k) \in J_m \times I_n : \left|\Delta f_{jk}(x) - \left(x^{j+k} + x^{j+k+1} - 2\right)\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

yani $\Delta f_{jk}(x)$ dizisi hem 2'ye hem de -2'ye istatistiksel yakınsak olup bu imkansızdır. Bu da $\widetilde{\alpha} > 1$ için$(\lambda, \mu)(\Delta^r) -$ istatistiksel yakınsaklığın iyi tanımlı olmadığını gösterir.

4.1.13 Teorem: $\{f_{jk}\}$ ve $\{g_{jk}\}$ A kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların iki çift indisli dizisi olsun. Eğer A kümesi üzerinde

$$S_{(\lambda,\mu)}^{\widetilde{\alpha}} - \lim \Delta^r f_{jk}(x) = f(x)$$

ve

$$S_{(\lambda,\mu)}^{\widetilde{\alpha}} - \lim \Delta^r g_{jk}(x) = g(x)$$

ise $a, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$S_{(\lambda,\mu)}^{\widetilde{\alpha}} - \lim \left(a\Delta^r f_{jk}(x) + \beta\Delta^r g_{jk}(x)\right) = af(x) + \beta g(x)$$

dir.

İspat: Her $x \in A$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} & \lim_{j,k\to\infty} \left|a\Delta^r f_{jk}(x) + \beta\Delta^r g_{jk}(x) - (af(x) + \beta g(x))\right| \\ = & \lim_{j,k\to\infty} \left|a\left(\Delta^r f_{jk}(x) - f(x)\right) + \beta\left(\Delta^r g_{jk}(x) - g(x)\right)\right| \\ \leq & \lim_{j,k\to\infty} |a| \left|\Delta^r f_{jk}(x) - f(x)\right| + \lim_{j,k\to\infty} |\beta| \left|\Delta^r g_{jk}(x) - g(x)\right| \to 0 \end{aligned}$$

dır. Sonuç olarak

$$S_{(\lambda,\mu)}^{\widetilde{\alpha}} - \lim \left(a\Delta^r f_{jk}(x) + \beta\Delta^r g_{jk}(x)\right) = af(x) + \beta g(x)$$

dir.

4.1.14 Tanım: $\widetilde{\alpha} \in (0,1]$ herhangi bir reel sayı olsun. $A \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların çift indisli dizisi$\{f_{jk}\}$ olsun. Eğer her bir $x \in A$ için $J_m = [m - \lambda_m + 1, m]$ ve $I_n = [n - \mu_n + 1, n]$ olmak üzere

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{\lambda_m^a \mu_n^b} \sum_{(j,k)\in J_m \times I_n} |\Delta^r f_{jk}(x) - f(x)| = 0$$

olacak şekilde $f(x)$ fonksiyonu varsa $\{\Delta^r f_{jk}\}$ çift indisli fonksiyon dizisi f'ye A üzerinde $\widetilde{\alpha}$. mertebeden kuvvetli (V, λ, μ) toplanabilirdir denir.

$\widetilde{\alpha}$. mertebeden kuvvetli (V, λ, μ) toplanabilir çift indisli fonksiyon dizilerinin kümesi $\left[w_{(\lambda,\mu)}^{\widetilde{\alpha}}\right](\Delta^r, f)$ ile göstereceğiz.

$\lambda_m = m$, $\mu_n = n$ ve $\widetilde{\alpha} = (a,b) = (1,1)$, $r = 0$ alınırsa çift indisli fonksiyon dizilerinin kuvvetli Cesaro toplamı elde edilir.

$\widetilde{\alpha} = (a,b) = (1,1)$ ve $r = 0$ alınırsa çift indisli fonksiyon dizilerinin kuvvetli (V, λ, μ) yakınsaklığı elde edilir.

4.1.15 Teorem: $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in (0,1]$ ve $\widetilde{\alpha} \preceq \widetilde{\beta}$ olsun. Eğer (f_{jk}) dizisi $f(x)$'e $\widetilde{\alpha}$. mertebeden $(\lambda,\mu)(\Delta^r)-$ istatistiksel yakınsak ise bu taktirde bu dizi $f(x)$'e $\widetilde{\beta}$. mertebeden $(\lambda,\mu)(\Delta^r)-$ istatistiksel yakınsaktır. Yani $S_{(\lambda,\mu)}^{\widetilde{\alpha}}(\Delta^r, f) \subseteq S_{(\lambda,\mu)}^{\widetilde{\beta}}(\Delta^r, f)$ dir. Bu kapsama $\widetilde{\alpha} \prec \widetilde{\beta}$ olacak şekilde bu $\widetilde{\alpha}$ ve $\widetilde{\beta}$ değerleri için kesindir.

İspat: $0 < \alpha < b \leq 1$ olsun. Bu taktirde her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda_n^a \mu_n^b} |\{(j,k) \in J_m \times I_n : |\Delta^r f_{jk}(x) - L| \geq \varepsilon\}| \\ \leq \; & \frac{1}{\lambda_n^a \mu_n^b} |\{(j,k) \in J_m \times I_n : |\Delta^r f_{jk}(x) - L| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

olduğundan $S_{(\lambda,\mu)}^{\widetilde{\alpha}}(\Delta^r, f) \subseteq S_{(\lambda,\mu)}^{\widetilde{\beta}}(\Delta^r, f)$ elde edilir. Şimdi bu kapsamanın kesin olduğunu gösterelim. Bunu için $\lambda_m = m$, $\mu_n = n$ ve $\{f_{jk}\}$ dizisini aşağıdaki gibi alalım.

$$f_{jk}(x) = \begin{cases} 1, \; j,k = n^2 \\ \frac{jkx}{1+2j^2k^2x^2}, \; j,k \neq n^2 \end{cases}$$

$\Delta f_{jk}(x)$'i oluşturalım

$$\Delta f_{jk}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{j(k+1)x}{2+j^2(k+1)^2x^2} - \frac{(j+1)kx}{2+(j+1)^2k^2x^2} + \frac{(j+1)(k+1)x}{2+(j+1)^2(k+1)^2x^2}, \; j,k = n^2 \\ \frac{jkx}{2+j^2k^2x^2} - \frac{j(k+1)x}{2+j^2(k+1)^2x^2} - \frac{(j+1)kx}{2+(j+1)^2(k+1)^2x^2} - 1, \; j,k = n^2 - 1 \\ \frac{jkx}{2+j^2k^2x^2} - \frac{j(k+1)x}{2+j^2(k+1)^2x^2} - \frac{(j+1)kx}{2+(j+1)^2k^2x^2} + \frac{(j+1)(k+1)x}{2+(j+1)^2(k+1)^2x^2}, \; j,k \neq n^2 \end{cases}$$

$\{f_{jk}\}$ $\widetilde{\alpha} \succ \frac{1}{2}$ için $\widetilde{\alpha}$.dereceden $\Delta-$ istatistiksel yakınsak yani $S^{\widetilde{\alpha}}_{(\lambda,\mu)} - \lim \Delta^r f_{jk}(x) = 0$ fakat $\widetilde{\alpha} \prec \frac{1}{2}$ için $\{f_{jk}\}$ dizisi $(\lambda,\mu)(\Delta^r)-$ istatistiksel yakınsak değildir.

4.1.16 Sonuç: $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in (0,1]$ olsun.

$i)\beta \cong 1$ ise $S^{\widetilde{\alpha}}_{(\lambda,\mu)}(\Delta^r, f) \subseteq S_{(\lambda,\mu)}(\Delta^r, f)$ kapsaması kesindir.

$ii)S^{\widetilde{\alpha}}_{(\lambda,\mu)}(\Delta^r, f) = S^{\widetilde{\beta}}_{(\lambda,\mu)}(\Delta^r, f) \Leftrightarrow \widetilde{\alpha} = \widetilde{\beta}$ olmasıdır.

$iii)S^{\widetilde{\alpha}}_{(\lambda,\mu)}(\Delta^r, f) = S_{(\lambda,\mu)}(\Delta^r, f) \Leftrightarrow \widetilde{\alpha} \cong 1$ olmasıdır.

4.1.17 Teorem: $\lambda = (\lambda_m)$ ve $\mu = (\mu_n)$ λ'nın elemanı iki dizi ve $\widetilde{\alpha} \in (0,1]$ olsun. O zaman

$i)$ Her λ, μ ve $\widetilde{\alpha} \in (0,1]$ için $S^{\widetilde{\alpha}}_{(\lambda,\mu)}(\Delta^r, f) \subseteq S^2(\Delta^r, f)$ dir.

$ii)S^2(\Delta^r, f) \subset S^{\widetilde{\alpha}}_{(\lambda,\mu)}(\Delta^r, f)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{m\to\infty} \inf \frac{\lambda_m^\alpha}{m} > 0 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \inf \frac{\mu_n^b}{n} > 0 \tag{4.1}$$

olmasıdır.

İspat:

$i)$ kolayca görülebilir.

$ii)$ $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$|\{j \le n, k \le m : |\Delta^r f_{jk}(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}| \supset \{(j,k) \in J_m \times I_n : |\Delta^r f_{jk}(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}$$

yazabiliriz. Bu nedenle

$$\begin{aligned} & \frac{1}{mn}|\{j \le n, k \le m : |\Delta^r f_{jk}(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}| \\ \ge \; & \frac{1}{mn}|\{(j,k) \in J_m \times I_n : |\Delta^r f_{jk}(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}| \\ \ge \; & \frac{\lambda_m^a}{m}\frac{1}{\lambda_m^a}\frac{\mu_n^b}{n}\frac{1}{\mu_n^b}|\{(j,k) \in J_m \times I_n : |\Delta^r f_{jk}(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}| \end{aligned}$$

$n, m \to \infty$ için limit alınırsa $\{f_{jk}\}$ dizisi f'e $S^2(\Delta^r, f)$ yakınsak ise $\{f_{jk}\}$ dizisi f'e $S^{\widetilde{\alpha}}_{(\lambda,\mu)}(\Delta^r, f)$ yakınsaktır.

Tersine $\{f_{jk}\} \in S^2(\Delta^r, f)$ ve $\liminf \frac{\lambda_m^\alpha}{m} = 0$ veya $\liminf \frac{\mu_n^\beta}{n} = 0$ veya her ikisi 0 olsun. $(m(p))$ ve $(n(q))$ alt dizilerini seçelim.$\frac{\lambda^\alpha_{m(p)}}{m(p)} < \frac{1}{p}$ ve $\frac{\mu^\beta_{n(q)}}{n(q)} < \frac{1}{q}$ olsun. $\{\Delta^r f_{jk}\}$ dizisini

$$\Delta^r f_{jk} = \begin{cases} 1, \quad j \in J_{m+1}, k \in I_{n+1}, \; p, q = 1, 2, 3, \cdots \\ \qquad\qquad 0, \quad \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman $f_{jk} \in S^2(\Delta^r, f)$ fakat $\{f_{jk}\} \notin S^{\widetilde{\alpha}}_{(\lambda,\mu)}(\Delta^r, f)$'dir. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyl (4.1) sağlanır.

4.1.18 Tanım: $\widetilde{\alpha} \in (0,1]$, p herhangi bir reel sayı olsun. Bu durumda $J_m = [m - \lambda_m + 1, m]$ ve $I_n = [n - \mu_n + 1, n]$ olmak üzere

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{\lambda_m^a \mu_n^b} \sum_{\substack{(j,k)\in J_m\times I_n \\ x\in A}} |\Delta^m f_{jk}(x) - f(x)|^p = 0$$

olacak şekilde bir f fonksiyonu varsa (f_{jk}) dizisi f fonksiyonuna $\widetilde{\alpha}$.dereceden $p-$ kuvvetli (V, λ, μ) toplanabilirdir denir.

$\widetilde{\alpha}$.dereceden kuvvetli (V, λ, μ) toplanabilir çift indisli fonksiyon dizilerinin kümesi $[V, \lambda, \mu]_p^{\alpha}(\Delta^r, p)$ ile göstereceğiz.

4.1.19 Teorem: $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in (0,1]$ ve $\widetilde{\alpha} \prec \widetilde{\beta}$ olsun. A üzerinde tanımlı$\{f_{jk}\}$ çift indisli dizisi f'ye $[V, \lambda, \mu]_p^{\widetilde{\alpha}}(\Delta^r, f)$ toplanabilir ise bu taktirde bu iki dizi f'ye $[V, \lambda, \mu]_p^{\widetilde{\beta}}(\Delta^r, f)$ toplanabilirdir. Yani $[V, \lambda, \mu]_p^{\widetilde{\alpha}}(\Delta^r f) \subseteq [V, \lambda, \mu]_p^{\widetilde{\alpha}}(\Delta^r f)$ dir ve bu kapsama $\widetilde{\alpha} \prec \widetilde{\beta}$ olacak şekilde bazı $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}$ değerleri için kesindir.

İspat: $(f_{jk}) \in [V, \lambda, \mu]_p^{\alpha}(\Delta^r, f)$ olsun. $\widetilde{\alpha}, \in (0,1]$ ve p reel sayısı için

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{\lambda_m^a \mu_n^b} \sum_{\substack{(j,k)\in J_m\times I_n \\ x\in A}} |\Delta^r f_{jk}(x) - f(x)|^p = 0$$

yazarız. Verilen $\widetilde{\alpha}$ ve $\widetilde{\beta}$ sayıları için $\widetilde{\alpha} \preceq \widetilde{\beta}$ olduğundan $p > 0$ için

$$\begin{aligned}
&\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{\lambda_m^c \mu_n^d} \sum_{\substack{(j,k)\in J_m\times I_n \\ x\in A}} |\Delta^r f_{jk}(x) - f(x)|^p \\
\leq\; &\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{\lambda_m^a \mu_n^b} \sum_{\substack{(j,k)\in J_m\times I_n \\ x\in A}} |\Delta^r f_{jk}(x) - f(x)|^p = 0
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Yani $[V, \lambda, \mu]_p^{\alpha}(\Delta^r, f) \subseteq [V, \lambda, \mu]_p^{\beta}(\Delta^r, f)$ elde ederiz. Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için

$$\Delta^r f_{jk}(x) = \begin{cases} 1, \; m - \sqrt{\lambda_m} + 1 \leq j \leq m \text{ ve } n - \sqrt{\mu_n} + 1 \leq k \leq n \\ 0, \; \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. $\widetilde{\beta} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ için $\frac{1}{2} < c \leq 1$, $\frac{1}{2} \leq d < 1$ olduğundan

$$\frac{1}{\lambda_m^c \mu_n^d} \sum_{(j,k)\in J_m\times I_n} |\Delta^r f_{jk}(x) - f(x)|^p \leq \frac{\sqrt{\lambda_m}\sqrt{\mu_n}}{\lambda_m^c \mu_n^d} = \frac{1}{\lambda_m^{c-\frac{1}{2}} \mu_n^{d-\frac{1}{2}}}$$

$m, n \to \infty$ iken $\frac{1}{\lambda_m^{c-\frac{1}{2}} \mu_n^{d-\frac{1}{2}}} \to 0$ olduğundan (f_{jk}) dizisi 0'a kuvvetli $[V, \lambda, \mu]_p^{\beta}(\Delta^r, f)$ toplanabilirdir fakat $\widetilde{\alpha} \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ için $0 < a \leq \frac{1}{2}$, $0 < b \leq \frac{1}{2}$ olduğundan

$$\frac{\left(\sqrt{\lambda_m} - 1\right)\left(\sqrt{\mu_n} - 1\right)}{\lambda_m^a \mu_n^b} \leq \frac{1}{\lambda_m^a \mu_n^b} \sum_{(j,k)\in J_m\times I_n} |\Delta^r f_{jk}(x) - 0|^p$$

ve $m, n \to \infty$ iken
$$\frac{\left(\sqrt{\lambda_m}-1\right)\left(\sqrt{\mu_n}-1\right)}{\lambda_m^a \mu_n^b} \to 0$$
olduğundan (f_{jk}) dizisi $[V,\lambda,\mu]\left(\Delta_\alpha^m, f\right)$ toplanabilir değildir.

4.2 Çift İndisli Fonksiyon Dizilerinin Farklarının α.Dereceden Lacunary İstatistiksel Yakınsaklığı

$\theta = \{(j_r, k_s)\}$ çift indisli dizi olsun. Bununla beraber $j_0 = 0$ ve $r \to \infty$ iken
$$h_r = j_r - j_{r-1} \to \infty$$
ve $k_0 = 0$ ve $s \to \infty$ iken
$$\overline{h}_s = k_s - k_{s-1} \to \infty$$
olacak şekilde tamsayıların artan iki dizisi var ise $\theta = \{(j_r, k_s)\}$ çift indisli dizisine çift lacunary dizisi denir. Burada $k_{r,s} = j_r k_s$, $h_{r,s} = h_r \overline{h}_s$ ve θ tarafından belirlenen aralıklar ise
$$\begin{aligned} I_r &= \{j : j_{r-1} < j \leq j_r\} \\ I_s &= \{k : k_{s-1} < k \leq k_s\} \\ I_{r,s} &= \{(j,k) : j_{r-1} < j \leq j_r \text{ ve } k_{s-1} < k \leq k_s\} \end{aligned}$$
şeklindedir. Ayrıca
$$q_r = \frac{j_r}{j_{r-1}},\ \overline{q}_s = \frac{k_s}{k_{s-1}} \text{ ve } q_{r,s} = q_r \overline{q}_s$$
dir. Bütün çift indisli lacunary dizilerinin kümesi $N_{\theta_{r,s}}$ ile gösterilir[14] .

4.2.1 Tanım: $h = (h_{r,s})$ dizisi yukarıda tanımlandığı gibi gözönüne alınsın ve $0 \prec \widetilde{\alpha} \preceq 1$ herhangi bir reel sayı $\{f_{jk}\}$ fonksiyonların bir dizisi olsun.
$$I_{r,s} = \{(j,k) : j_{r-1} < j \leq j_r \text{ ve } k_{s-1} < k \leq k_s\}$$
ve $h_{r,s}$'nin $\widetilde{\alpha}$. kuvveti
$$h^{\widetilde{\alpha}} = \left(h_{r,s}^{\widetilde{\alpha}}\right) = \left(h_r^{\alpha} \overline{h}_s^{\beta}\right)$$
olmak üzere
$$(P) - \lim_{r,s\to\infty} \frac{1}{h_{r,s}^{\widetilde{\alpha}}} \left|\left\{(j,k) \in I_{r,s} : \left|\Delta^r f_{jk}(x) - f(x)\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

olacak şekilde bir f varsa$\{f_{jk}\}$dizisi f'ye $\widetilde{\alpha}$. dereceden Δ^r-lacunary istatistiksel yakınsaktır diyeceğiz. Bu yakınsaklığı

$$S_{\theta}^{\widetilde{\alpha}} - \lim \Delta^r f_{jk}(x) = f(x) \text{ ve } f_{jk} \to f\left(S_{\theta}^{\widetilde{\alpha}}(\Delta^r, f)\right)$$

ile göstereceğiz.

Bütün $\widetilde{\alpha}$. dereceden Δ^r-lacunary istatistiksel yakınsak fonksiyon dizilerin kümesini $S_{\theta}^{\widetilde{\alpha}}(\Delta^r, f)$ ile göstereceğiz.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$'nin bir K alt cümlesinin $\widetilde{\alpha}$. dereceden $\theta-$yoğunluğu

$$\delta_{\theta}^{\widetilde{\alpha}}(K) = \lim_{r,s} \frac{1}{h_{r,s}^{\widetilde{\alpha}}} \left|\{j_{r-1} < j \leq j_r \text{ ve } k_{s-1} < k \leq k_s : (j,k) \in K\}\right|$$

şeklinde tanımlayacağız.

4.2.2 Teorem: $K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olsun. $\theta = \{(j_r, k_s)\}$ bir çift lacunary dizisi olsun. $0 \prec \widetilde{\alpha} \preceq \widetilde{\beta} \preceq 1$ için $\delta_{\theta}^{\widetilde{\alpha}}(K) \leq \delta_{\theta}^{\widetilde{\beta}}(K)$ dır.

İspat: $0 \prec \widetilde{\alpha} \preceq \widetilde{\beta} \preceq 1$ olsun. $h_{r,s}^{\widetilde{\alpha}} \leq h_{r,s}^{\widetilde{\beta}}$ olduğundan

$$\frac{1}{h_{r,s}^{\widetilde{\alpha}}} \geq \frac{1}{h_{r,s}^{\widetilde{\beta}}}$$

olur. Buradan

$$\frac{1}{h_{r,s}^{\widetilde{\beta}}} \left|\{(j,k) \in I_{r,s} : (j,k) \in K\}\right| \leq \frac{1}{h_{r,s}^{\widetilde{\alpha}}} \left|\{(j,k) \in I_{r,s} : (j,k) \in K\}\right|$$

yazabiliriz. Böylece $\delta_{\theta}^{\widetilde{\beta}}(K) \subseteq \delta_{\theta}^{\widetilde{\alpha}}(K)$ elde ederiz.

$0 \prec \widetilde{\alpha} \preceq 1$ için $\widetilde{\alpha}$. dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklık iyi tanımlıdır. Fakat genel olarak $\widetilde{\alpha} \succ 1$ için iyi tanımlı değildir. Bunun için aşağıdaki örneği gözönüne alabiliriz.

$$f_{jk}(x) = \begin{cases} x^{j+k}, & j+k \neq 2n \\ 1, & j+k = 2n \end{cases}$$

fonksiyon dizisini alalım. $x \in [0,1]$ olsun. Buradan

$$\Delta f_{jk}(x) = \begin{cases} x^{j+k} - x^{j+k+2} - 2\ , & j+k \neq 2n,\ n = 1,2,3,\ldots \\ 2 - 2x^{j+k+1}, & j+k = 2n,\ n = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

dizisini elde ederiz. $\widetilde{\alpha} \succ 1$ için $a > 1$ ve $b > 1$ olacağından

$$(P) - \lim_{r,s\to\infty} \frac{1}{h_{r,s}^{\widetilde{\alpha}}} \left|\left\{(j,k) \in I_{r,s} : \left|\Delta f_{jk}(x) - \left(x^{j+k} - x^{j+k+2} - 2\right)\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$
$$\leq \lim_{r,s\to\infty} \frac{(j_r - j_{r-1})(k_s - k_{s-1})}{h_r^{\alpha} \overline{h}_s^{\beta}} \leq \lim_{r,s\to\infty} \frac{h_r \overline{h}_s}{h_r^a \overline{h}_s^b} = 0$$

olup $S_\theta^{\widetilde{\alpha}} - \lim \Delta f_{jk}(x) = +2$ ve

$$\lim_{r,s\to\infty} \frac{1}{h_{r,s}^{\widetilde{\alpha}}} \left|\left\{(j,k) \in I_{r,s} : \left|\Delta^r f_{jk}(x) - \left(2 - 2x^{j+k+1}\right)\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$
$$\leq \lim_{r,s\to\infty} \frac{1}{h_{r,s}^{\widetilde{\alpha}}} (j_r - j_{r-1})(k_s - k_{s-1}) = \lim_{r,s\to\infty} \frac{h_r \overline{h}_s}{h_r^a \overline{h}_s^b} = 0$$

olup $S_\theta^{\widetilde{\alpha}} - \lim \Delta f_{jk}(x) = -2$ olur. Bu durumda Δf_{jk} dizisi hem 2'ye hem de -2'ye $\widetilde{\alpha}$. dereceden lacunary istatistiksel yakınsak olur. Fakat bu mümkün değildir.

4.2.3 Teorem: $\widetilde{\alpha} \in (0,1]$ ve $\{f_{jk}\}$, $\{g_{jk}\}$ iki fonksiyon dizisi ve $c \in \mathbb{R}$ olsun.

$i) S_\theta^{\widetilde{\alpha}} - \lim \Delta^r f_{jk}(x) = f(x)$ ve $c \in \mathbb{R}$ ise $S_\theta^{\widetilde{\alpha}} - \lim \Delta^r c f_{jk}(x) = cf(x)$

$ii) S_\theta^{\widetilde{\alpha}} - \lim \Delta^r f_{jk}(x) = f(x)$ ve $S_\theta^{\widetilde{\alpha}} - \lim \Delta^r g_{jk}(x) = g(x)$ ise

$$S_\theta^{\widetilde{\alpha}} - \lim \left(\Delta^r f_{jk}(x) + \Delta^r g_{jk}(x)\right) = f(x) + g(x)$$

dir.

İspat: $i)$'nin ispatı aşağıdaki eşitsizlikten elde edilir.

$$\frac{1}{h_{r,s}^{\widetilde{\alpha}}} \left|\left\{(j,k) \in I_{r,s} : \left|\Delta^r f_{jk}(x) - cf(x)\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$
$$= \frac{1}{h_{r,s}^{\widetilde{\alpha}}} \left|\left\{(j,k) \in I_{r,s} : \left|\Delta^r f_{jk}(x) - f(x)\right| \geq \frac{\varepsilon}{|c|}\right\}\right|$$

$ii)$'nin ispatı da aşağıdaki eşitsizlikten elde edilir.

$$\frac{1}{h_{r,s}^{\widetilde{\alpha}}} \left|\left\{(j,k) \in I_{r,s} : \left|\Delta^r f_{jk}(x) + \Delta^r g_{jk}(x) - (f(x) + g(x))\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$
$$\leq \frac{1}{h_{r,s}^{\widetilde{\alpha}}} \left|\left\{(j,k) \in I_{r,s} : \left|\Delta^r f_{jk}(x) - f(x)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$
$$+ \frac{1}{h_{r,s}^{\widetilde{\alpha}}} \left|\left\{(j,k) \in I_{r,s} : \left|\Delta^r g_{jk}(x) - g(x)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$

elde edilir.

4.2.4 Tanım: θ bir çift lacunary dizisi ve $\widetilde{\alpha} \in (0,1]$ olsun. p pozitif bir reel sayı olmak üzere

$$(P) - \lim_{r,s} \frac{1}{h_{r,s}^{\widetilde{\alpha}}} \sum_{(j,k)\in I_{r,s}} \left|\Delta^r f_{jk}(x) - f(x)\right|^p = 0$$

olacak şekilde bir f fonksiyonu varsa$\{f_{jk}\}$ fonksiyon dizisi f'ye $\widetilde{\alpha}$. dereceden kuvvetli Δ_p^r-lacunary yakınsaktır denir.

$\widetilde{\alpha}$. dereceden kuvvetli Δ_p^r-lacunary yakınsak çift indisli fonksiyon dizilerinin cümlesi $N_\theta^{\widetilde{\alpha}}\left[\Delta_p^r, f\right]$ ile gösterilecektir. Buna göre

$$N_\theta^{\widetilde{\alpha}}\left[\Delta_p^r, f\right] = \left\{ f = (f_{jk}) : \exists f \text{ için } (P) - \lim_{r,s} \frac{1}{h_{r,s}^{\widetilde{\alpha}}} \sum_{(j,k)\in I_{r,s}} \left|\Delta^r f_{jk}(x) - f(x)\right|^p = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlayacağız. $\widetilde{\alpha}$. dereceden sıfıra kuvvetli Δ_p^r-lacunary yakınsak fonksiyon dizilerinin uzayını $N_{\theta,0}^{\widetilde{\alpha}}\left[\Delta_p^r, f\right]$ ile göstereceğiz. Eğer $\theta = (2^r)$ alınırsa $\widetilde{\alpha}$. dereceden Δ_p^r-Cesaro toplanabilir çift fonksiyon dizilerinin kümesi

$$w_2^{\widetilde{\alpha}}\left[\Delta_p^r, f\right] = \left\{ f = (f_{jk}) : \exists f \text{ için } P - \lim_{m,n} \frac{1}{m^a n^b} \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \left|\Delta^r f_{jk}(x) - f(x)\right|^p = 0 \right\}$$

elde edilir. $f = 0$ olması halinde bu uzayı $w_{2,0}^{\widetilde{\alpha}}\left[\Delta_p^r, f\right]$ ile göstereceğiz.

4.2.5 Teorem: θ herhangi bir çift lacunary dizisi ve $0 \prec \widetilde{\alpha} \prec \widetilde{\beta} \preceq 1$, olsun. Bu taktirde $S_\theta^{\widetilde{\alpha}}(\Delta^r, f) \subseteq S_\theta^{\widetilde{\beta}}(\Delta^r, f)$ dır.

İspat: $0 \prec \widetilde{\alpha} \preceq \widetilde{\beta} \preceq 1$ olsun. Bu taktirde her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_{r,s}^{\widetilde{\beta}}} \left|\left\{(j,k) \in I_{r,s} : \left|\Delta^r f_{jk}(x) - f(x)\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \\ \leq\ & \frac{1}{h_{r,s}^{\widetilde{\alpha}}} \left|\left\{(j,k) \in I_{r,s} : \left|\Delta^r f_{jk}(x) - f(x)\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece $S_\theta^{\widetilde{\alpha}}(\Delta^r, f) \subseteq S_\theta^{\widetilde{\beta}}(\Delta^r, f)$ elde ederiz.

4.2.6 Teorem: θ herhangi bir çift lacunary dizisi ve $0 \prec \widetilde{\alpha} \preceq 1$ için $\liminf q_r > 1$ ve $\liminf \overline{q}_s > 1$ ise

$$S_2^{\widetilde{\alpha}}(\Delta^r, f) \subseteq S_\theta^{\widetilde{\alpha}}(\Delta^r, f)$$

dır.

İspat: $\liminf q_r > 1$ ve $\liminf \overline{q}_s > 1$ olsun. Yeterince büyük r ve s için $q_r > 1+\delta, \overline{q}_s > 1+\beta$ olacak şekilde $\delta > 0$ ve $\beta > 0$ sayıları vardır. Bu durumda

$$q_r > 1+\delta \Rightarrow \frac{j_r}{j_{r-1}} > 1+\delta \Rightarrow 1 - \left(\frac{j_{r-1}}{j_r}\right) > 1 - \left(\frac{1}{1+\delta}\right)$$

olup buradan $a > 0$ için

$$\frac{h_r}{j_r} \geq \frac{\delta}{1+\delta} \Rightarrow \left(\frac{h_r}{j_r}\right)^a \geq \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^a \Rightarrow \frac{1}{(j_r)^a} \geq \frac{\delta^a}{(1+\delta)^a}\frac{1}{h_r^a}$$

elde edilir. Aynı şekilde

$$\overline{q}_s > 1+\beta \Rightarrow \frac{k_s}{k_{s-1}} > 1+\beta \Rightarrow 1-\left(\frac{k_{s-1}}{k_s}\right) > 1-\left(\frac{1}{1+\beta}\right)$$

olup buradab $b>0$ için

$$\frac{\overline{h}_s}{k_s} \geq \frac{\beta}{1+\beta} \Rightarrow \left(\frac{\overline{h}_s}{k_s}\right)^b \geq \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^b \Rightarrow \frac{1}{(k_s)^b} \geq \frac{\beta^b}{(1+\beta)^b}\frac{1}{\overline{h}_s^b}$$

elde edilir. $f_{jk} \to f\ S_2^{\widetilde{\alpha}}(\Delta^r, f)$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{j_r^a k_s^b}\left|\left\{j \leq j_r,\ k \leq k_s : \left|\Delta^r f_{jk}(x) - f(x)\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \\ \geq\ & \frac{1}{j_r^a k_s^b}\left|\left\{(j,k) \in I_{r,s} : \left|\Delta^r f_{jk}(x) - f(x)\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \\ \geq\ & \frac{\delta^a}{(1+\delta)^a}\frac{1}{h_r^a}\frac{\beta^b}{(1+\beta)^b}\frac{1}{\overline{h}_s^b}\left|\left\{(j,k) \in I_{r,s} : \left|\Delta^r f_{jk}(x) - f(x)\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $f_{jk} \to f\ \left(S_\theta^{\widetilde{\alpha}}(\Delta^r, f)\right)$ dir. Bu da

$$S_2^{\widetilde{\alpha}}(\Delta^r, f) \subseteq S_\theta^{\widetilde{\alpha}}(\Delta^r, f)$$

olduğunu gösterir.

4.2.7 Teorem: θ herhangi bir çift lacunary dizisi ve $0 \prec \widetilde{\alpha} \prec 1$ için $\limsup q_r < \infty$ ve $\limsup q_s < \infty$ ise

$$S_\theta^{\widetilde{\alpha}}(\Delta^r, f) \subset S_2^{\widetilde{\alpha}}(\Delta^r, f)$$

dir.

İspat: $\limsup q_r < \infty$ ve $\limsup q_s < \infty$ ise her r ve s için $q_r < H$ ve $q_s < H$ olacak şekilde bir $H > 0$ vardır. $f_{jk} \to f\ \left(S_\theta^{\widetilde{\alpha}}(\Delta^r, f)\right)$

$$N_{r,s} = \left\{(j,k) \in I_{r,s} : \left|\Delta^r f_{jk}(x) - f(x)\right| \geq \varepsilon\right\}$$

olduğunu kabul edelim. $0 \prec \widetilde{\alpha} \preceq 1$ için

$$(P) - \lim_{r,s} \frac{1}{h_r^\alpha \overline{h}_s^b}\left|\left\{(j,k) \in I_{r,s} : \left|\Delta^r f_{jk}(x) - f(x)\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

olduğundan $\forall\varepsilon > 0$ ve $0 < \widetilde{\alpha} \leq 1$ için en az bir $r_0, s_0 \in N$ vardır öyle ki $\frac{N_{r,s}}{h_{r,s}^\alpha} < \varepsilon$ yazabiliriz. Diğer taraftan $h_{r,s}^\alpha \leq h_{r,s}$ olduğundan

$$\frac{N_{r,s}}{h_{r,s}} \leq \frac{N_{r,s}}{h_{r,s}^{\widetilde{\alpha}}}$$

olup $\frac{N_{r,s}}{h^{\alpha}_{r,s}} < \varepsilon$ dur. $M = \max\{N_{r,s} : 1 \leq r \leq r_0$ ve $1 \leq s \leq s_0\}$ ve n, m de $j_{r-1} < n \leq j_r$, $k_{s-1} < m \leq k_s$ şartını sağlayan iki tamsayı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{mn} \left|\{j \leq m \text{ ve } k \leq n : \left|\Delta^r f_{jk}(x) - f(x)\right| \geq \varepsilon\}\right| \\
\leq\ & \frac{1}{j_{r-1}k_{s-1}} \left|\{j \leq j_r \text{ ve } k \leq k_s : \left|\Delta^r f_{jk}(x) - f(x)\right| \geq \varepsilon\}\right| \\
=\ & \frac{1}{j_{r-1}k_{s-1}} \left\{\sum_{i,j=1,1}^{r,s} N_{i,j}\right\} \\
\leq\ & \frac{M_{r_0 s_0}}{j_{r-1}k_{s-1}} + \frac{1}{j_{r-1}k_{s-1}} \left\{\sum_{i,j=r_0+1,r_0+1}^{r,s} N_{i,j}\right\} \\
\leq\ & \frac{M_{r_0 s_0}}{j_{r-1}k_{s-1}} + \frac{1}{j_{r-1}k_{s-1}} \left\{\sum_{i,j=r_0+1,r_0+1}^{r,s} \frac{N_{ij}h_{ij}}{h_{ij}}\right\} \\
\leq\ & \frac{M_{r_0 s_0}}{j_{r-1}k_{s-1}} + \frac{1}{j_{r-1}k_{s-1}} \left(\sup_{i,j \geq r_0,r_0} \frac{N_{ij}}{h_{ij}}\right) \left\{\sum_{i,j=r_0+1,r_0+1}^{r,s} h_{ij}\right\} \\
\leq\ & \frac{M_{r_0 s_0}}{j_{r-1}k_{s-1}} + \varepsilon \left\{\sum_{i,j=r_0+1,r_0+1}^{r,s} h_{ij}\right\} \\
\leq\ & \frac{M_{r_0 s_0}}{j_{r-1}k_{s-1}} + \varepsilon H^2
\end{aligned}$$

elde edilir. $f_{jk} \to f\ \left(S_2^{\widetilde{\alpha}}(\Delta^r, f)\right)$ olup $S_\theta^{\widetilde{\alpha}}(\Delta^r, f) \subset S_2^{\widetilde{\alpha}}(\Delta^r, f)$ dir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Biz bu tezde çift indisli fonksiyon dizileri için,

"Bir S kümesi üzerinde $\{f_{jk}\}$ fonksiyonların bir çift indisli dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her bir (sabit) $x \in S$ için

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{nm} \left|\left\{(j,k), j \leq n \text{ ve } k \leq m : |f_{jk}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

ise $\{f_{jk}\}$ çift indisli fonksiyon dizisi f'ye noktasal istatistiksel yakınsaktır." $\widetilde{\alpha} \in (0,1]$ herhangi bir reel sayı olsun. $A \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların çift indisli dizisi$\{f_{jk}\}$ olsun. Eğer her bir $x \in A$ için $J_m = [m - \lambda_m + 1, m]$ ve $I_n = [n - \mu_n + 1, n]$ olmak üzere

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{\lambda_m^a \mu_n^b} \sum_{(j,k)\in J_m \times I_n} |\Delta^r f_{jk}(x) - f(x)| = 0$$

olacak şekilde $f(x)$ fonksiyonu varsa $\{\Delta^r f_{jk}\}$çift indisli fonksiyon dizisi f'ye A üzerinde $\widetilde{\alpha}$. mertebeden kuvvetli (V, λ, μ) toplanabilirdir.

$\theta = \{(j_r, k_s)\}$ çift indisli dizi olsun. Bununla beraber $j_0 = 0$ ve $r \to \infty$ iken

$$h_r = j_r - j_{r-1} \to \infty$$

ve $k_0 = 0$ ve $s \to \infty$ iken

$$\overline{h}_s = k_s - k_{s-1} \to \infty$$

olacak şekilde tamsayıların artan iki dizisi var ise $\theta = \{(j_r, k_s)\}$ çift indisli dizisine çift lacunary dizisi denir. Burada $k_{r,s} = j_r k_s$, $h_{r,s} = h_r \overline{h}_s$ ve θ tarafından belirlenen aralıklar ise

$$\begin{aligned}
I_r &= \{j : j_{r-1} < j \leq j_r\} \\
I_s &= \{k : k_{s-1} < k \leq k_s\} \\
I_{r,s} &= \{(j,k) : j_{r-1} < j \leq j_r \text{ ve } k_{s-1} < k \leq k_s\}
\end{aligned}$$

şeklindedir.

$h = (h_{r,s})$ dizisi yukarıda tanımlandığı gibi gözönüne alınsın ve $0 \prec \widetilde{\alpha} = (a,b) \preceq 1$ herhangi bir reel sayı $f = (f_{jk})$ fonksiyonların bir dizisi olsun.

$$I_{r,s} = \{(j,k) : j_{r-1} < j \leq j_r \text{ ve } k_{s-1} < k \leq k_s\}$$

ve $h_{r,s}$'nin $\widetilde{\alpha}$. kuvveti

$$h^{\widetilde{\alpha}} = \left(h_{r,s}^{\widetilde{\alpha}}\right) = \left(h_{r,s}^{\alpha}\overline{h}_{s}^{\beta}\right)$$

olmak üzere

$$P - \lim_{r,s\to\infty} \frac{1}{h_{r,s}^{\widetilde{\alpha}}} \left|\left\{(j,k) \in I_{r,s} : \left|\Delta^r f_{jk}\left(x\right) - f\left(x\right)\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

olacak şekilde bir f varsa (f_{jk}) dizisi f'ye $\widetilde{\alpha}$. dereceden Δ^r-lacunary istatistiksel yakınsaktır. θ bir çift lacunary dizisi ve $\widetilde{\alpha} \in (0,1]$ olsun. p pozitif bir reel sayı olmak üzere

$$P - \lim_{r,s} \frac{1}{h_{r,s}^{\widetilde{\alpha}}} \sum_{(j,k)\in I_{r,s}} \left|\Delta^r f_{jk}\left(x\right) - f\left(x\right)\right|^p = 0$$

olacak şekilde bir f fonksiyonu varsa $\{f_{jk}\}$ fonksiyon dizisi f'ye $\widetilde{\alpha}$. dereceden kuvvetli Δ_p^r-lacunary yakınsaktır. Tanımlarını da verip α ve β durumları gibi ayrı kuvvetler için kapsama bağıntılarını inceledik.

5.2. Öneriler

Çift indisli fonksiyon dizilerinde I Lacunary yakınsaklık I^* Lacunary yakınsaklık çalışılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Fast H, 1951. Sur la convergence statistique, Colloq. Math. 2: 241-244.

[2] Steinhaus H, 1951. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique. Colloq. Math. 2 : 73-74.

[3] Schoenberg IJ, 1959. The integrability of certain functions and related summability methods. Amer, Math, Monthly, 66: 361-375.

[4] Fridy JA, 1985. On the statistical convergence, Analysis, 5: 301-313.

[5] Connor J, 1988. The statistical and strong p-Cesaro convergence of sequences. Analysis, 8: 47-63.

[6] Mursaleen, Osama HH, Edely, 2003. Statistical convergence of double sequences. J, Math, Appl, 288: 223-231.

[7] Fridy JA, Orhan C, 1993. Lacunary statistical convergence. Pacific J, Math. 160 (1): 43-51.

[8] Moricz F, 1994. Tauberian for Cesáro summable double sequences. Studia Math. 110: 83-96.

[9] Çolak R, 2010. Satistical convergence of order α. Modern methods in analysis and its appl, Anamaya publishers, New Delhi, 122-129.

[10] Gadjiev AD, Orhan C, 2002. Some approximation theorems via statistical convergence. Rocky mountain j, 32 (1): 345-355.

[11] Mursaleen M, 2001. λ – Statisticial convergence. Math. Slovaca 50(1) : 111-115.

[12] Çolak R, and Bektaş Ç,A, 2011. On λ- statiscial convergence of order α. Acta Math, Sci. 31(3) : 953-959.

[13] Crnjac M, Cunjalo F, Miller HI, 2004. Subsequence characterizations of statistical convergence of double sequences. Radovi matematıckı vol, 12: 163-175.

[14] Patterson Rıchard F, Savaş E, 2005. Lacunary statistcial convergence of double sequences. Mathematical communıcations, 10: 55-61.

[15] Gökhan A, Güngör M, 2002. On pointwise convergence. Indian J. Pure Appl. Math. 33 (9): 1379-1384.

[16] Kızmaz H, 1981. On certain sequence spaces. Canad, Math, Bulli vol, 24(2): 169-176.

[17] Kreyszig E, 1978. Introductory Fucntional Analysis with Applications. John Wiley and Sons, New York.

[18] Freedman AR, Sember JJ, Raphael M, 1978. Some cesáro-type summability spaces. Proc. Lond. Math. Soc. 37 (3): 508-520.

[19] Buck RC, 1953. Generalized asymptotic density. Amer, J, Math., 75: 335-346.

[20] Maddox IJ, 1978. A new type of convergence. Math, Proc, Camb, Phil, Soc, 83: 61-64.

[21] Nanda S, 1983. Matrix Transformations and Sequence Spaces. İnternational Centre for Theoretical Physics, Italy.

[22] Niven I, Zuckerman HS, 1980. An Introduction to the Theory of Numbers. John Wiley, & Sons. New York.

[23] Pringsheim A, 1900. Zur Ttheorie der zweifach unendlichen. Math. Ann. 53: 289-321.

[24] Başarır M, 1995. On the Δ-Statistical Convergence of Sequences. Fırat Üniversitesi, Fen ve Müh. Bilimleri Dergisi, 7(2): 1-6.

[25] Et M, Gökhan A, Güngör M, 2007. Statiscial convergence of double sequences of Real-Valued Functions. International mathematical forum, 2. no, 8: 365-346.

[26] Et M, Nuray F, 2001. Δ^m-Stastistical convergence. Indian, J, Pure appl, Math, 32 (6): 961-969.

[27] Çolak R, 1989. On some generalized sequence spaces. Sci., Üniv., Common Fac., Ankara, Series A,V, 38: 35-46.

[28] Çolak R, Altın Y, 2013. Statistical convergence of double sequences of order $\tilde{\alpha}$. Journal of function spaces and applications, vol.

[29] Et M, 2000. On some topological properties of generealized difference sequence spaces, iternat, j. Math & math. Sci, 24(11):785-791.

[30] Et M, Çolak R, 1995. On some generalized difference sequence spaces, Soochow, J. Math, 21: 377-386.

[31] Duman O, Orhan C, 2004. μ statistically convergent function sequences, 54(129) no. 2:413-422.

[32] Mursaleen M, Çakan C, Mohiuddine SA, Savaş E, 2010. generalized statisticial convergence and statisticial core of double sequences, Acta. Math. Sci. 20(11):2131-2144.

[33] Güngör M, Gökhan A, 2005. On uniform statisticial convergence, international journal of pure and applied math. 19(1):17-25.

ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında Adıyaman'da doğdu. İlk Öğretimini Karagöl İlköğretim Okulu'nda Orta Öğretimini Merkez Gazi İlköğretim Okulu'nda ve liseyi Adıyaman Lisesi'nde tamamladı. 2014 yılında Muş Alparslan Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. Aynı yıl Bitlis Eren Üniversitesi ile Muş Alparslan Üniversitesinin açmış olduğu ortak lisansüstü eğitimine başladı.

Dilan ŞEKER