

T.C.  
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ  
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI  
YÜKSEK LİSANS TEZİ

GEOMETRİK DÖNÜŞÜMLER VE MAPLE UYGULAMALARI

Döndü Bahar BAŞKÖY AKAGÜNDÜZ

TEMMUZ 2021

MATEMATİK ANABİLİM DALI  
YÜKSEK LİSANS TEZİ

GEOMETRİK DÖNÜŞÜMLER VE MAPLE UYGULAMALARI

Hazırlayan

Döndü Bahar BAŞKÖY AKAGÜNDÜZ

Danışman

Doç.Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI

Jüri Üyeleri

Doç.Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI

Doç. Dr. Ali ÇAKMAK

Dr. Öğr. Üyesi Şakir İŞLEYEN

TEMMUZ 2021

## ONAY

**Döndü Bahar BAŞKÖY AKAGÜNDÜZ** tarafından hazırlanan “**Geometrik Dönüşümler ve Maple Uygulamaları**” adlı tez çalışması 13/07/2021 tarihinde yapılan sınavla aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

### İmza

Dr. Öğr. Üyesi Şakir İŞLEYEN

(Başkan)

Doç. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI

(Danışman)

Doç. Dr. Ali ÇAKMAK

(Üye)

---

---

---

Bu tezin kabulü, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun .../.../...gün ve .../... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Zeki ARGUNHAN

Enstitü Müdürü

**BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**  
**YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI**  
**ETİK BEYANI**

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre hazırlamış olduğum “**Geometrik Dönüşümler ve Maple Uygulamaları**” adlı tezimin özgün bir çalışma olduğunu, tez hazırlanırken tüm aşamalarda bilimsel etik ilkelerine uygun davrandığımı, tez kapsamında sunulan tüm verileri bilimsel etik ilkelerine uygun elde ettiğimi, tezde faydalandığım tüm eserlere atıf yaptığımı ve kaynaklar kısmında bu eserleri gösterdiğimi beyan ederim. 08/06/2021

Döndü Bahar BAŞKÖY AKAGÜNDÜZ

# ÖZET

## GEOMETRİK DÖNÜŞÜMLER VE MAPLE UYGULAMALARI

Döndü Bahar BAŞKÖY AKAGÜNDÜZ

Yüksek Lisans Tezi

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI

Temmuz 2021, 158 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde çalışmamızın tarihsel gelişimi hakkında bilgiler verildi. Materyal ve yöntem bölümünde vektör uzayı, afin uzayı, Öklid uzayı, Öklid çatısı, Öklid koordinat sistemi, doğru ve düzlem denklemleri, iki doğrunun birbirlerine göre durumları, iki düzlemin birbirine göre durumları, doğru ve düzlemin birbirlerine göre durumları, doğru ve düzlem ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. Ayrıca vektörlerle ilgili kavramlar, matris ve matris işlemleri, Fibonacci ve Lucas sayıları, Fibonacci ve Lucas vektörleri ve özellikleri verilmiştir. Bulgular bölümünde, iki boyutlu ve üç boyutlu uzaydaki dönüşümlerinin matris kombinasyonları ifade edilmiştir. Fibonacci ve Lucas 3-vektörlerinin Öklid 3-uzayındaki dönüşümleri incelenmiştir. Fibonacci ve Lucas sayıları ve Fibonacci ve Lucas vektörlerinin bazı özellikleri verilmiştir. Householder dönüşümü ve  $m$ -boyutlu Fibonacci ve Lucas vektörleri için Householder dönüşümü tanımlandıktan sonra daha özel hali olan Fibonacci ve Lucas 3-vektörleri için Householder dönüşümü verilmiştir. Ayrıca dönüşümlerin Maple programında uygulamaları ve kodları oluşturulmuştur. Dördüncü bölümde ise sonuç ve öneriler verildikten sonra son bölümde kaynakçalar yazılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Bilgisayar Destekli Geometrik Tasarım, Geometrik Dönüşümler, Fibonacci ve Lucas vektörleri, Householder dönüşümü, Öklid uzayı.

## ABSTRACT

### GEOMETRIC TRANSFORMATIONS AND MAPLE APPLICATIONS

Döndü Bahar BAŞKÖY AKAGÜNDÜZ

Master Thesis

Bitlis Eren University Graduate Education Institute

Department of Mathematics

Supervisor: Doç.Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI

July 2021, 158 pages

This thesis consists of five chapters. In the introduction chapter; we give some information about the historical developments of our study. In the material and method chapter, vector space, Affine space, Euclidean space, Euclidean frame, Euclidean coordinate system, line and plane equations, states of two lines with respect to each other, states of two planes relative to each other, states of line and plane with respect to each other, fundamentals about line and plane concepts are given. In addition, concepts related to vectors, matrix and matrix operations, Fibonacci and Lucas numbers, Fibonacci and Lucas vectors and its properties are given. In the main results section, the matrix combinations of the transformations in two-dimensional and three-dimensional space are expressed. The transformations in Euclidean 3-space of Fibonacci and Lucas 3-vectors have been studied. Some properties of the Fibonacci and Lucas numbers, Fibonacci and Lucas vectors are given. After defining the Householder transformation and the  $m$ -dimensional Fibonacci and Lucas vectors, the Householder transformation is given for the more specific Fibonacci and Lucas 3-vectors. Also, the applications and codes of the transformations in Maple program were created. In the fourth chapter, after the conclusions and suggestions of our study were given, the bibliography was written in the last chapter.

**Keywords:** Computer Aided Geometric Design, Geometric Transformations, Fibonacci and Lucas vectors, Householder transformation, Euclidean space.

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim sürecinde görüş ve önerileriyle beni yönlendiren bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım, bana her konuda fikirlerini ve desteğini esirgemeyen saygı değer hocam **Doç. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI'** ya en samimi duygularıyla, saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarımın her anında bana koşulsuz destek olan, anlayış ve güvenlerini esirgemeyen başta sevgili eşim ve aileme minnet ve şükranlarımı sunarım.



## İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET .....	i
ABSTRACT .....	ii
TEŞEKKÜR .....	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ .....	iiiv
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ .....	x
SİMGELER DİZİNİ .....	xi
<b>1. GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
<b>2. MATERYAL VE YÖNTEM</b> .....	<b>3</b>
2.1. Uzayda Doğru Denklemi .....	5
2.1.1. Bir Noktası ve Doğrultmanı Verilen Doğrunun Denklemi .....	5
2.1.2. İki Noktası Verilen Doğrunun Denklemi .....	6
2.1.3. Bir Noktası Bilinen ve İki Vektöre Dik Olan Doğrunun Denklemi. ....	6
2.2. $R^3$ Uzayında İki Doğrunun Birbirine Göre Durumları .....	6
2.2.1. İki Doğrunun Paralel Olması .....	7
2.2.2. İki Doğrunun Birbirine Dik Olması .....	7
2.2.3. İki Doğrunun Çakışık Olması .....	8
2.2.4. İki Doğrunun Kesişmesi .....	8
2.2.5. Paralel Olmayan İki Doğrunun Kesişmemesi (Aykırı Doğrular) .....	8
2.3. İki Doğru Arasındaki Açısı .....	9
2.4. Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı .....	9
2.5. Aykırı İki Doğru Arasındaki Uzaklık .....	9
2.6. Uzayda Düzlem Denklemi .....	10
2.6.1. Bir Noktası ve Normali Bilinen Düzlemin Denklemi .....	10
2.6.2. Üç Noktası Verilen Düzlem Denklemi .....	10

2.6.2.1. Vektörel Çarpımla Düzlemin Normal Vektörünün Hesaplanması .....	10
2.6.2.2. Düzlemde Bulunan Üç Vektörün Lineer Bağımlılığı .....	11
2.6.3. Verilen İki Doğruya Paralel Olan ve Bir Noktası Verilen Düzlemin Denklemi .....	11
2.6.4. Eksenleri Kestiği Noktaların Koordinatları Verilen Düzlem Denklemi.....	11
2.7. İki Düzlemin Birbirine Göre Durumları.....	12
2.7.1. İki Düzlemin Paralel Olması.....	12
2.7.2. İki Düzlemin Dik Kesişmesi .....	12
2.8. Bir Doğru İle Bir Düzlemin Birbirine Göre Durumları .....	12
2.8.1. Bir Doğrunun Bir Düzleme Paralel Olması .....	13
2.8.2. Bir Doğrunun Bir Düzlem İçinde Olması.....	13
2.8.3. Bir Doğrunun Bir Düzlemle Bir Noktada Kesişmesi .....	13
2.9. Öklid İç Çarpımı.....	14
2.10. İki Vektör Arasındaki Açılı .....	14
2.11. İki Vektör ile Oluşturulan Paralelkenarın Alanı .....	15
2.12. Üçgenin Alanı .....	15
2.13. İzdüşüm Vektörünün Bulunması.....	15
2.14. Vektörel Çarpım.....	15
2.15. Matrisler ve İşlemleri .....	16
2.15.1. Satır ve Sütun Matrisi .....	16
2.15.2. Kare Matris .....	17
2.15.3. Birim Matris.....	17
2.15.4. Bir Matrisin Transpozesi.....	17
2.15.5. Matrislerde Toplama İşlemi.....	18
2.15.6. Matrisleri Skaler ile Çarpma İşlemi.....	18
2.15.7. Matris Toplamının ve Skaler ile Çarpma İşleminin Özellikleri .....	18
2.15.8. Matrislerde Çarpma İşlemi .....	19
2.15.9. Kare Matrislerin Çarpma İşlemine Göre Tersi .....	20

2.15.10. Matrisin Determinantı .....	21
2.16. Fibonacci–Lucas Sayıları ve Vektörlerinin Temel Özellikleri .....	22
2.17. $E^n$ Uzayında Householder Dönüşümü .....	26
<b>3. BULGULAR</b> .....	<b>29</b>
3.1. İki Boyutlu Dönüşümler ve MAPLE Uygulamaları .....	29
3.1.1. İki Boyutlu Noktaların Temsili .....	29
3.1.2. Dönüşümler ve Matrisler .....	30
3.1.2.1. Noktaların Dönüşümleri .....	30
3.1.2.2. Doğrular Dönüşümü .....	33
3.1.2.3. Orta Nokta Dönüşümü .....	34
3.1.2.4. Paralel Doğruların Dönüşümü .....	37
3.1.2.5. Kesişen Doğruların Dönüşümü.....	38
3.1.2.6. Dönme.....	43
3.1.2.7. Yansıma .....	48
3.1.2.8. Ölçeklendirme.....	52
3.1.2.9. Birleştirilmiş Dönüşümler.....	56
3.1.2.10. Birim Kare Dönüşümü.....	60
3.1.2.11. Öteleme ve Homojen Koordinatlar .....	63
3.1.2.12. Keyfi Bir Nokta Etrafında Dönme.....	64
3.1.2.13. Keyfi Bir Doğruya Göre Yansıma .....	66
3.1.2.14. Tümünden Ölçekleme.....	69
3.1.2.15. Sonsuz Noktalar .....	70
3.2. Üç Boyutlu Dönüşümler ve MAPLE Uygulamaları .....	75
3.2.1. Üç Boyutlu Noktaların Temsili.....	75
3.2.2. Üç Boyutlu Ölçeklendirme .....	76
3.2.3. Üç Boyutlu Meyillenme.....	80
3.2.4. Üç Boyutlu Dönme .....	81

3.2.5. Üç Boyutlu Yansıma.....	89
3.2.5.1. Üç Boyutlu Öklid Uzayında Düzleme Göre Yansıma.....	89
3.2.6. Üç Boyutlu Öteleme .....	94
3.2.7. Çoklu Dönüşümler.....	96
3.2.8. Bir Eksene Paralel Olan Koordinat Eksenleri İle İlgili Dönemeler.....	99
3.2.9. Uzaydaki Keyfi Bir Eksen Etrafında Dönme.....	105
3.2.10. Keyfi Bir Düzlem Boyunca Yansıma .....	115
3.2.10.1. Orijinden Geçmeyen Bir Düzleme Göre Yansıma .....	123
3.3. Fibonacci ve Lucas 3-Vektörlerinde Dönüşümler ve MAPLE Uygulamaları .....	125
3.3.1. Fibonacci ve Lucas 3-Vektörlerinde Ölçeklendirme .....	125
3.3.2. Fibonacci ve Lucas 3-Vektörlerinde Meyillenme .....	128
3.3.3 Fibonacci ve Lucas 3-Vektörlerinde Dönme .....	130
3.3.4. Fibonacci ve Lucas 3-Vektörlerinde Yansıma.....	134
3.3.5. Fibonacci ve Lucas 3-Vektörlerinde Öteleme .....	138
3.3.6. Fibonacci ve Lucas 3-Vektörlerinde Çoklu Dönüşümler .....	140
3.4. Fibonacci ve Lucas Vektörleri için Householder Dönüşümü ve MAPLE Uygulamaları .	142
3.4.1. m-Boyutlu Fibonacci Vektörleri için Householder Dönüşümü .....	142
3.4.2. m-Boyutlu Lucas Vektörleri için Householder Dönüşümü .....	144
3.4.3. m-Boyutlu Fibonacci Vektörü ve Lucas Vektörü için Householder Dönüşümü.....	146
3.5. Dönüşümlerle ilgili Animasyon İçerikli MAPLE Uygulamaları .....	149
<b>4. SONUÇ VE ÖNERİLER .....</b>	<b>155</b>
<b>5. KAYNAKLAR .....</b>	<b>156</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ .....</b>	<b>158</b>

## ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>ŞEKİL</u>	<u>Sayfa</u>
2.1. Householder Dönüşümü .....	28
3.1. Noktaların dönüşümü .....	32
3.2. Paralel doğruların dönüşümü.....	34
3.3. Kesişen doğruların dönüşümü .....	42
3.4. Dönme .....	43
3.5. Konum vektörünün dönmesi .....	44
3.6. İki boyutlu dönme.....	48
3.7. Yansıma .....	48
3.8. İki boyutlu yansıma .....	50
3.9. Birleşik yansımalar sonucu dönmeler.....	52
3.10. Düzgün ve düzensiz ölçekleme veya bozulma .....	53
3.11. Görünür meyillenme olmadan tek tip ölçeklendirme .....	54
3.12. İki boyutlu ölçeklendirme.....	55
3.13. Birleştirilmiş iki boyutlu dönüşümler(Üçgen için).....	58
3.14. Birleştirilmiş iki boyutlu dönüşümler(Yıldız için) .....	59
3.15. Birim karenin genel dönüşümü. <b>(a)</b> dönüşümden önce; <b>(b)</b> dönüşümden sonra.....	60
3.16. Alan ölçeklendirme.....	63
3.17. Keyfi bir doğru üzerinden yansıma. <b>(a)</b> Orijinal ve nihai konum; <b>(b)</b> doğrunun başlangıç noktasına ötelenmesi; <b>(c)</b> doğrunun $x$ -ekseninde döndürülmesi; <b>(d)</b> $x$ -ekseninde yansıma; <b>(e)</b> geri dönme; <b>(a)</b> geri öteleme .....	68
3.18. Genel ölçeklemenin geometrik bir yorumu .....	70
3.19. Üç boyutlu ölçeklendirme dönüşümleri .....	78
3.20. Üç boyutlu dönme(L harfi için).....	83
3.21. Üç boyutlu dönme(dikdörtgen paralel yüzlü).....	85
3.22. Değişmesiz üç boyutlu dönmeler .....	88
3.23. Düzleme göre yansıma .....	91
3.24. $xy$ -düzlemi üzerinde üç boyutlu yansıma .....	92
3.25. Üç boyutlu yansıma .....	94
3.26. Üç boyutlu öteleme.....	96
3.27. Koordinat eksenlerinden birine paralel bir eksen etrafında dönme .....	103
3.28. Yerel eksen sistemi etrafında çoklu dönmeler.....	104

3.29. <i>OP</i> birim vektörünü $z$ -ekseniyle çakıştırarak dönmeler. (a) $x$ etrafında dönme; (b) $y$ etrafında dönme .....	106
3.30. Keyfi bir eksen etrafında dönme .....	115
3.31. Keyfi bir düzleme göre yansıma.....	123
3.32. Orijinden geçmeyen düzleme göre yansıma.....	125
3.33. Fibonacci ve Lucas 3-vektörlerinde ölçeklendirme.....	127
3.34. Fibonacci 3-vektöründe genel ölçeklendirme.....	128
3.35. Fibonacci ve Lucas 3-vektörlerinde meyillenme.....	130
3.36. Fibonacci ve Lucas 3-vektörlerinde dönme .....	134
3.37. Fibonacci ve Lucas 3-vektörlerinde yansıma .....	137
3.38. Fibonacci ve Lucas 3-vektörlerinde öteleme.....	140
3.39. Fibonacci 3-vektöründe çoklu dönüşümler .....	142
3.40. Fibonacci 3-vektöründe Householder dönüşümü.....	149
3.41. Öteleme animasyonu (top).....	149
3.42. Öteleme animasyonu (eğri) .....	150
3.43. Dönme animasyonu (eğri) .....	150
3.44. Ölçeklendirme animasyonu .....	151
3.45. Öteleme animasyonu (çember).....	151
3.46. Öteleme animasyonu (üçgenler).....	152
3.47. Öteleme animasyonu .....	152
3.48. Öteleme animasyonu (üçgen) .....	153
3.49. $x$ -eksenine göre simetri animasyonu .....	153
3.50. $y$ -eksenine göre simetri animasyonu .....	154
3.51. Orijine göre simetri animasyonu .....	154

## ÇİZELGELER DİZİNİ

### ÇİZELGE

### Sayfa

3.1.  $[4 \ 3]$  Noktası için homojen koordinatlar .....74



## SİMGELER DİZİNİ

$V$	Vektör uzayı
$R$	Reel sayılar kümesi
$E^n$	Standart Öklid uzayı
$R^3$	3- boyutlu Öklid uzayı
$\vec{u}$	Doğrultman vektör
$\langle , \rangle$	İç çarpım
$\  \cdot \ $	Norm
$\times$	Vektörel çarpım
$\vec{N}$	Normal vektör
$\det A$	Matris determinantı
$[ \ ]$	Matris
$I_n$	$n$ . mertebeden birim matris
$A^T$	Matrisin transpozesi
$A^{-1}$	Matrisin çarpmaya göre tersi
$A_{ij}$	Matrisin kofaktörü
$M_{ij}$	Matrisin minörü
$F_n$	$n$ 'inci Fibonacci sayısı
$\vec{F}_n$	Fibonacci 3-vektörleri
$[T]$	Dönüşüm matrisi
$r$	Vektörün uzunluğu
$h$	Homojen koordinat
$[T']$	Öteleme matrisi
$[R]$	Dönme matrisi
$[R']$	Yansıma matrisi
$\theta$	Dönme açısı
$m$	Eğim
$P$	Konum vektörü

$[R_x]$	$x$ - ekseninde d6nme matrisi
$[R_y]$	$y$ - ekseninde d6nme matrisi
$[R_z]$	$z$ - ekseninde d6nme matrisi
$[Rfl_z]$	$z$ - ekseninde yansımaya matrisi
$izd_v ( )$	Dik izdüşüm vektörü
$\mathcal{H}$	Householder matrisi
$\mathcal{H}(\vec{F}_n)$	Fibonacci 3- vektöründe Householder dönüşümü



## 1. GİRİŞ

Geometri, belli bir dönüşüm grubu altındaki değişmezlerin teorisidir. Bu nedendir ki geometrileri dönüşümlerle birleştirerek ele almak gerekir. Bu fikri ilk defa 1872 de Felix Klein “Erlangen Programı” ile ortaya koymuş ve geometrileri sınıflandırmıştır [1]. Noktalar ve bunları birleştiren doğrular, uygun bir çizim algoritması ile birlikte nesnelere temsil etmek veya bilgileri grafiksel olarak göstermek için kullanılır. Bu noktaları ve doğruları dönüştürme yeteneği bilgisayar grafikleri için temeldir. Bir nesneyi görselleştirirken, nesnenin perspektif görünümünü ölçeklendirmek, döndürmek, ötelemek, düzeltmek veya geliştirmek istenilebilir [2].

Householder dönüşümü, bir düzleme ya da hiper-düzleme göre yansıma tanımlayan doğrusal bir dönüşümdür. 1958’de Alston Scott Householder tarafından tanımlanan Householder dönüşümü ve bu dönüşüme karşılık gelen matris, başta nümerik lineer cebir alanı olmak üzere, matrislerin  $QR$  çarpımsal yazılımları için ilk işlem olarak uygulanmaktadır. Bunun yanı sıra, simetrik matrislerin tri-diyagonalleştirilmesinde ve simetrik olmayan matrislerin Hessenberg formuna dönüştürülmesinde de geniş bir kullanım alanı bulmaktadır [24].

Householder dönüşümünün çeşitli uzaylarda, dejenere olmayan bilineer ya da sesquilineer formları, Mackey vd. (2004) tarafından çalışılmıştır. Cartan–Dieudonné teoremi olarak bilinen, her ortogonal dönüşümün, hiper-düzlemlere göre yansıma belirten dönüşümlerin bileşkesi olarak ifade edilebileceğini gösteren teoremden sonra, yansıma dönüşümleri önemli bir çalışma alanı olmuştur. Bu teoremin, genelleştirilmiş reel iç çarpım uzaylarındaki durumuna ait yapısal ispatı, Uhlig (2001) ve Fuller (2011) tarafından yapılmıştır. Ayrıca, yine genelleştirilmiş iç çarpım uzaylarındaki alternatif ispatı da Rodríguez-Andrade vd. (2011) ile verilmiştir [13].

Fibonacci sayılarıyla çalışan birinin güzel sonuçlar elde ettiğini görmek şaşırtıcı değildir. Bu yüzden, Fibonacci sayıları özellikle cebir alanında çalışan matematikçilerin ilgilendikleri bir konu olmuştur. Son yıllarda ise geometri alanında çalışanlar da Fibonacci sayılarıyla ilgilenmeye başlamışlar ve Fibonacci vektörleri tanımlayarak Fibonacci sayılarına geometrik bir anlam katmayı amaçlamışlardır. K. T. Atanassov, V. Atanassova, A. G. Shannon ve J. C. Turner [23] tarafından yapılan çalışmada Fibonacci 3-vektörler tanımlanmış olup Fibonacci sayılarına ait özellikler temel alınarak Fibonacci 3-vektörler için bazı özellikler verilmiştir. Ayrıca, Fibonacci vektörlerle oluşturulan üçgenlerin alanları hesaplanmıştır [16]. Fibonacci 3-vektörlerinde ilk kez vektörel çarpımı tanımlamıştır.

Fibonacci sayılarına benzer şekilde, Lucas sayıları da Fransız bir matematikçi olan Edouard Lucas tarafından, 1878’de yaygın olarak çalışılan bir matematik konusu haline geldi[28].

E. Salter [14] yaptığı çalışmada bir Fibonacci  $r$ -vektörün (ve Lucas vektörün) tanımını yapmış ve iki vektörün iç çarpımına farklı bir bakış açısı getirmiştir. İlk kez Fibonacci ve Lucas vektörlerinin normunu hesaplamıştır. Fibonacci vektörleri de ilk kez farklı boyutlarda incelenmiştir.

O. Kaya, M. Önder Fibonacci ve Lucas vektörleri ve kuaterniyonlarını geometrik bir yaklaşımla incelemişlerdir [29].

Karmaşık tek yönlü dönüşümler basit tek eylemlili dönüşümleri içeren prosedürler kullanılarak kolayca oluşturulabilir. Genellikle daha az hata eğilimlidir ve hesaplamalı olarak doğrudan bir matematiksel yaklaşımdan daha verimlidir. Bundan dolayı dönüşümleri geometrik problemlerde kullanarak; doğru sonuçlara kolayca ulaşırız. Dönüşümler birçok geometrik problemlerde kullanıldığından geniş bir çalışma alanına sahiptir. Burada dikkat edilmesi gereken, işlemlerin çoğunu tekrarlayan niteliklerini yapmaktansa, bunların bilgisayar programlaması ve uygulamalarının yapılabilmesidir. Günümüzde mimar ve mühendislik çalışma alanlarında dönüşüm teknikleri uygulanmaktadır.

Maple, matematik ile ilgili hemen hemen tüm problemlerin çözülebileceği bir paket programdır. Maple komutlarını kullanarak program da yapılabilir. Bu özelliği sayesinde arşiv komutları kullanılarak her türlü matematik problemi çözülebilir [11]. Geçmişte yapılan çalışmaların bize sunduğu bilgiler ışığında bu tez çalışmamızdaki amacımız; iki ve üç boyutlu geometrik dönüşümler göz önünde bulundurularak, bilgisayar grafiğinin altında yatan matematiğin temel çalışmalarını incelemektir. Bu uygulamalarımızı Maple uygulamaları ile bilgisayar grafiklerine aktarmaktır. Bu tez çalışmamızdaki iki ve üç boyutlu dönüşümlerin Maple uygulamaları ile elde edilen sonuçların hem geometrik hem de diğer alanlarda yol gösterici nitelikte bir çalışma olacağı düşünülmektedir. Ayrıca Fibonacci ve Lucas vektörleri tanımlanmış olup Fibonacci ve Lucas sayılarına ait özellikler temel alınarak Fibonacci ve Lucas 3-vektörleri için bazı özellikler verilmiştir. Fibonacci ve Lucas 3-vektörleri ile dönüşümler incelenmiş ve dönüşüm matrisleri tanımlanmıştır. Householder dönüşümü ve özellikleri verilmiştir.  $m$ -boyutlu Fibonacci ve Lucas vektörleri için Householder dönüşümü tanımlandıktan sonra daha özel hali olan Fibonacci ve Lucas 3-vektörleri için Householder dönüşümü verilmiştir. Householder dönüşümünün çeşitli sayı sistemlerine uygulanması ileriki çalışmalara alt yapı oluşturabileceği düşünülmektedir.

## 2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde vektör uzayı, afin uzayı, Öklid uzayı, Öklid çatısı, Öklid koordinat sistemi kavramları açıklanmıştır. Uzayda doğru ve düzlem denklemleri, iki doğrunun birbirlerine göre durumları, iki düzlemin birbirine göre durumları, doğru ve düzlemin birbirlerine göre durumları, doğru ve düzlem ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. Ayrıca vektörlerle ilgili kavramlar, matrisler (birim, kare, satır ve sütun) ve matris işlemleri (transpozese, tersi, toplama, çarpma, determinant), Fibonacci ve Lucas sayıları, Fibonacci ve Lucas vektörleri ve özellikleri verilmiştir. Householder dönüşümü, örneği ve Maple programındaki şekli verilmiştir.

**Tanım 2.1. (Vektör Uzayı):**  $V$  boş olmayan, üzerinde vektörel toplama diyeceğimiz bir toplama ve skalerle (gerçek sayılarla) çarpım tanımlanmış bir küme olsun. Simgesel olarak, vektörel toplama ve skalerle çarpım işlemleri,

$$x, y \in V \text{ için } x + y \in V \text{ ve } r \in R, x \in V \text{ için } rx \in V$$

biçiminde tanımlı olsun; yani,  $V$  kümesi vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre kapalı olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa  $V$  kümesine  $R$  (gerçek sayılar kümesi) üzerinde bir **vektör uzayı** denir [21].

- V1.** Her  $x, y \in V$  için  $x + y = y + x$  olmalıdır. (Toplamanın değişme özelliği)
- V2.** Her  $x, y, z \in V$  için  $(x + y) + z = x + (y + z)$  olmalıdır. (Toplamanın birleşme özelliği)
- V3.** Her  $x \in V$  için  $x + 0 = 0 + x = x$  olacak şekilde bir  $0 \in V$  bulunmalıdır. (Toplama işlemine göre etkisiz eleman)
- V4.** Her  $x \in V$  için  $x + y = y + x = 0$  olacak şekilde bir  $y \in V$  bulunmalıdır. (Toplama işlemine göre ters eleman)
- V5.** Her  $x, y \in V$  ve her  $c \in R$  için  $c(x + y) = cx + cy$  olmalıdır. (Skaler ile çarpmanın toplama üzerine dağılımı)
- V6.** Her  $x \in V$  ve  $c_1, c_2 \in R$  için  $(c_1 + c_2)x = c_1x + c_2x$  olmalıdır.
- V7.** Her  $x \in V$  ve  $c_1, c_2 \in R$  için  $(c_1c_2)x = c_1(c_2x)$  olmalıdır.
- V8.** Her  $x \in V$  için  $1.x = x$  olmalıdır.

**Tanım 2.2. Afin Uzay:**  $A \neq \emptyset$  bir küme ve  $V, R$  reel sayılar cismi üzerinde  $n$ -boyutlu bir vektör uzayı olsun. Eğer

$$f : A \times A \rightarrow V$$

$$(P, Q) \rightarrow f(P, Q) = \overline{PQ}$$

fonksiyonu,

$$\mathbf{A1.} \quad \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R) \text{ (veya } \overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR})$$

$$\mathbf{A2.} \quad \forall P \in A, \forall \alpha \in V \text{ için } \overline{PQ} = \alpha \text{ olacak şekilde bir tek } Q \in A \text{ vardır.}$$

özelliklerini sağlıyorsa  $A$  kümesine  $V$  vektör uzayı ile birleşen  $n$ -boyutlu bir **Afin uzay** denir. Ayrıca A1. ve A2. özelliklerine ise **afin aksiyomlar** adı verilir [19,21].

**Tanım 2.3. Öklid Uzayı:**  $A$  bir reel afin uzay ve  $A$  ile birleşen vektör uzayı  $V$  olsun.

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n), Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \text{ olmak üzere}$$

$$\langle \rangle : V \times V \rightarrow R$$

$$(X, Y) \rightarrow \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımıyla  $A$  da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece  $A$  afin uzayı **Öklid uzayı** adını alır [19,21].

**Tanım 2.4. Öklid Çatısı:**  $E^n$  standart Öklid uzayı olmak üzere  $E^n$  uzayında sıralı bir  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$  nokta  $n+1$ lisine  $R^n$  de karşılık gelen  $\{\overline{P_0P_1}, \overline{P_0P_2}, \dots, \overline{P_0P_n}\}$  vektör  $n$  lisi  $R^n$  de bir ortonormal baz ise  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$  sistemine  $E^n$  nin bir **Öklid çatısı** denir [21].

**Tanım 2.5. Öklid Koordinat Sistemi:**  $E^n$  uzayında bir  $X$  noktasının standart Öklid çatısına göre ifadesi  $\overline{E_0X} = \sum_{i=1}^n x_i \overline{E_0E_i}$  dir.  $x : E^n \rightarrow R$  fonksiyonlarına  $X$  noktasının Öklid koordinat fonksiyonları ve  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  sistemine **Öklid koordinat sistemi** denir [19].

## 2.1. Uzayda Doğru Denklemi

Uzayda bir doğrunun denklemini bulabilmek için, bir noktanın ve doğrunun doğrultmanını ifade eden vektörün verilmesi gerekir. Bu vektörü genel olarak  $\vec{u}$  harfiyle göstereceğiz. Doğru denklemi en önemli unsur doğrultmandır [18]. Bazen doğrunun doğrultmanı dolaylı şekilde verilebilir. Doğrunun denkleminin nasıl bulunacağını üç durumda inceleyeceğiz.

1. Bir noktası ve doğrultmanı verilen doğrunun denklemi.
2. İki noktası verilen doğrunun denklemi.
3. Bir noktası bilinen ve verilen iki doğrultmana dik olan doğrunun denklemi.

### 2.1.1. Bir Noktası ve Doğrultmanı Verilen Doğrunun Denklemi

$R^3$ 'deki doğru denklemi  $R^n$  uzayına genelleştirilebilir.  $P$  noktasından geçen ve doğrultmanı  $\vec{u}$  olan doğrunun denklemi yine

$$\overrightarrow{PX} = \lambda \vec{u}$$

vektörel eşitliğinden elde edilebilir. Buna göre,  $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$  noktasından geçen ve doğrultman vektörü  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  olan doğrunun denklemi,  $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$  değişken nokta olmak üzere,

$$\lambda = \frac{x_1 - p_1}{u_1} = \frac{x_2 - p_2}{u_2} = \dots = \frac{x_n - p_n}{u_n}$$

kartezyen denklemiyle verilebilir. Buradan da,

$$x_1 = p_1 + u_1\lambda, x_2 = p_2 + u_2\lambda, \dots, x_n = p_n + u_n\lambda$$

elde edilir ki, bu doğrunun  $\lambda$  parametresine bağlı parametrik denklemdir [18].

### 2.1.2. İki Noktası Verilen Doğrunun Denklemi

İki noktanın oluşturduğu vektör, doğrunun doğrultmanı olacağından,  $\vec{u} = \overline{PQ}$  alınabilir. Böylece, doğrultmanı ve bir noktasını bildiğimiz bu doğrunun denklemini bulabiliriz. Buna göre,  $P(x_0, y_0, z_0)$  ve  $Q(x_1, y_1, z_1)$  noktasından geçen doğrunun denklemini bulalım [18].

$$\vec{u} = \overline{PQ} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

doğrultman vektörü olduğundan,  $P(x_0, y_0, z_0)$ 'dan geçen ve doğrultmanı  $\vec{u}$  olan doğrunun denklemi

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

olarak elde edilir.

### 2.1.3. Bir Noktası Bilinen ve İki Vektöre Dik Olan Doğrunun Denklemi

Herhangi iki vektöre dik olan bir doğrunun doğrultman vektörünü, vektörlerin vektörel çarpımından bulabiliriz. Herhangi bir doğrunun doğrultman vektörü  $\vec{u} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$  ile hesaplanabilir. Buna göre  $P$  noktası ve  $\vec{u}$  doğrultmanı bilinen doğru denkleminde doğrunun denklemini bulabiliriz [18].

## 2.2. $R^3$ Uzayında İki Doğrunun Birbirine Göre Durumları

Uzayda iki doğrunun birbirine göre beş durumu vardır.

1. Paralel olabilirler.
2. Dik olabilirler.
3. Çakışık olabilirler.
4. Kesişirler.

## 5. Aykırı doğrudur.

İki doğrunun birbirine göre durumlarını doğrultman vektör yardımıyla inceleyebiliriz. Buna göre,

$$(d_1): \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1} \text{ ve } (d_2): \frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}$$

doğruları verilsin. Bu doğruların doğrultman vektörleri sırasıyla

$$\vec{u}_1 = (a_1, b_1, c_1) \text{ ve } \vec{u}_2 = (a_2, b_2, c_2)$$

ile verilir. Şimdi, bu doğruların birbirine göre durumlarını, bu doğrultman vektörler yardımıyla inceleyelim [18].

### 2.2.1. İki Doğrunun Paralel Olması

Doğrultmanları  $\vec{u}_1 = (a_1, b_1, c_1)$  ve  $\vec{u}_2 = (a_2, b_2, c_2)$  olan iki doğrunun paralel olması durumunda yani  $\vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2$  için doğrultman vektörleri arasında  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$  koşulu sağlanır.

### 2.2.2. İki Doğrunun Birbirine Dik Olması

İki doğrunun dik olması için, doğrultman vektörleri dik olmalıdır. Buna göre,  $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$  olacağından  $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = 0$  ve dolayısıyla  $\vec{u}_1 = (a_1, b_1, c_1)$  ve  $\vec{u}_2 = (a_2, b_2, c_2)$  için,

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$$

koşulu sağlanır [18].

### 2.2.3. İki Doğrunun Çakışık Olması

İki doğrunun denklemleri bazen farklı görünse de, aynı doğruyu ifade ediyor olabilirler. Böyle doğrulara **çakışık doğrular** denir [18]. Örneğin,  $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = z$  ve  $x-1 = y-1 = 2z-1$  doğrularının her ikisi de aynı doğruyu ifade ederler. İki doğrunun çakışık olduğunu, doğrultmanlarının **paralel olup olmadığını inceleyerek ve bir ortak noktalarını bularak** gösterebiliriz. Yukarıda verilen iki doğrunun doğrultmanları paraleldir ve  $P(2,2,1)$  noktasının her iki doğruyu da sağladığı kolayca görülebilir. Ayrıca her iki doğruyu da sağlayan sonsuz sayıda nokta bulunabilir.

### 2.2.4. İki Doğrunun Kesişmesi

İki doğru kesişiyorsa mutlaka aynı düzlemde yer alırlar. Öncelikle, verilen iki  $d_1$  ve  $d_2$  doğrusunun aynı düzlemde olma koşulunu bulalım; düzlem üzerinde seçilecek üç vektörün lineer bağımlılığı, dolayısıyla determinantlarının sıfır olması koşulu kullanılabilir. Seçilecek iki vektör zaten açıktır. Bunlar doğruların doğrultman vektörleri olan  $\vec{u}_1$  ve  $\vec{u}_2$  vektörleridir. Üçüncü vektör olarak, her iki doğru üzerinde alınırsa  $P$  ve  $Q$  noktalarını birleştiren  $\overline{PQ}$  vektörü alınabilir. Böylece,  $d_1$  ve  $d_2$  doğrularının kesişme koşulu:

$$\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overline{PQ}) = 0 \text{ ve } \vec{u}_1 \nparallel \vec{u}_2$$

olarak ifade edilebilir. Bu koşul sadece  $R^3$  uzayında geçerlidir [18].

### 2.2.5. Paralel Olmayan İki Doğrunun Kesişmemesi (Aykırı Doğrular)

İki doğru aynı düzlemde yer almıyorsa, bu doğrulara **aykırı doğrular** denir. Doğrultman vektörleri  $\vec{u}_1$  ve  $\vec{u}_2$  olan ve  $\overline{PQ}$  vektörü, iki doğru üzerinde alınırsa  $P$  ve  $Q$  noktalarını birleştiren vektör olmak üzere ise,  $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overline{PQ}) \neq 0$  doğrular aykırı doğrulardır [18].

### 2.3. İki Doğru Arasındaki Aç

İki doğru arasındaki aç, doğruların doğrultman vektörleri arasındaki açdır. İki doğrultman arasındaki açyı iç çarpımla bulabileceğimiz için boyut önemli değildir. Her boyutta,

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle}{\|\vec{u}_1\| \|\vec{u}_2\|}$$

olduğunu kullanarak, iki doğru arasındaki aç bulunabilir [19].

### 2.4. Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı

**Teorem 2.4.1.**  $R^2$ 'de düzlemde bir  $A(x_0, y_0)$  noktasının  $ax + by + c = 0$  doğrusuna uzaklığı

$$\ell = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

denklemleri ile verilir [18].

**Teorem 2.4.2.**  $R^3$ 'de bir  $A$  noktasının,  $P$  noktasından geçen ve doğrultusu  $\vec{u}$  olan doğruya uzaklığı

$$\ell = \frac{\|\overline{AP} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

ile verilir [18].

### 2.5. Aykırı İki Doğru Arasındaki Uzaklık

$R^3$ 'de bir  $P$  noktasından geçen ve doğrultusu  $\vec{u}_1$  olan doğru ile,  $Q$  noktasından geçen ve doğrultusu  $\vec{u}_2$  olan doğru arasındaki en kısa uzaklık

$$\ell = \frac{|\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overline{PQ})|}{\|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\|}$$

olarak verilir [18].

## 2.6. Uzayda Düzlem Denklemi

$R^3$  uzayında, düzlem denklemini basit olarak, vektörleri ve iç çarpımı kullanarak ifade edebiliriz. Düzleme dik olan bir vektör, düzlem üzerindeki tüm vektörlere dik olacağından, iç çarpımları sıfır olur. O halde düzlem denklemini belirlemede en önemli vektör, düzleme dik olan vektördür. Bu vektöre düzlemin normali denir ve  $\vec{N}$  harfi ile gösterilir [18].

### 2.6.1. Bir Noktası ve Normali Bilinen Düzlemin Denklemi

$R^3$  uzayında, bir  $P(x_0, y_0, z_0)$  noktasından geçen ve  $\vec{N} = (A, B, C)$  vektörüne dik olan düzlemin denklemi

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

ile hesaplanır.

### 2.6.2. Üç Noktası Verilen Düzlem Denklemi

Bir düzlemin normal vektörü daima açıkça verilmeyebilir. Vektörlerin özellikleri kullanılarak, düzlemin denklemini bulabiliriz. İki farklı şekilde bulabileceğimizi gösterelim.

#### 2.6.2.1. Vektörel Çarpımla Düzlemin Normal Vektörünün Hesaplanması

Düzlem üzerinde verilen doğrusal olmayan üç noktayı kullanarak oluşturacağımız herhangi iki vektörün vektörel çarpımı, düzlemin normal vektörünü verir. Düzlemin doğrusal olmayan üç noktası  $P, Q, R$  olsun. Bu durumda  $\overline{PR} \times \overline{PQ}$  vektörel çarpımı, düzleme dik olacağından,  $\vec{N} = \overline{PR} \times \overline{PQ}$  alınabilir.

### 2.6.2.2. Düzlemde Bulunan Üç Vektörün Lineer Bağımlılığı

$R^3$  uzayında, bir  $P(x_1, y_1, z_1)$ ,  $Q(x_2, y_2, z_2)$  ve  $R(x_3, y_3, z_3)$  noktalarından geçen düzlemin denklemi

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

matrisinden hesaplanır [18].

### 2.6.3. Verilen İki Doğruya Paralel Olan ve Bir Noktası Verilen Düzlemin Denklemi

Eğer bir düzlem, iki doğruya paralel ise, bu doğruların doğrultman vektörlerine de paraleldir. Bu durumda, düzlemin normal vektörü, doğruların doğrultman vektörlerine dik olur. Doğruların doğrultmanları  $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$  olmak üzere,  $\vec{N} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$  alınabilir. Böylece normali ve bir noktası bilinen düzlem denklemini bulabiliriz [18]. Buna göre,  $P$  düzlem üzerinde bir nokta ve  $X$  düzlem üzerinde herhangi bir noktayı göstermek üzere,

$$\langle \vec{u}_1 \times \vec{u}_2, \overline{PX} \rangle = \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overline{PX}) = 0$$

eşitliği düzlem denklemini verir.

### 2.6.4. Eksenleri Kestiği Noktaların Koordinatları Verilen Düzlem Denklemi

Bir düzlemin  $x, y, z$  eksenlerini kestiği noktalar sırasıyla  $a, b, c$  ise bu düzlemin denklemi

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

ile bulunur [18].

## 2.7. İki Düzlemin Birbirine Göre Durumları

### 2.7.1. İki Düzlemin Paralel Olması

Düzlemlerin normalleri sırasıyla  $\vec{N}_1, \vec{N}_2$  olmak üzere düzlemlerin paralel olması için  $\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$  olmalıdır [19]. Yani;  $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$  ve  $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$  ise

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = k$$

olması gerekir.

### 2.7.2. İki Düzlemin Dik Kesişmesi

İki düzlemin dik olması için  $\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$  olması gerekir yani  $\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle = 0$  olmalıdır ve dolayısıyla  $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$  ve  $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$  ise

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

olması gerekir [19].

## 2.8. Bir Doğru ile Bir Düzlemin Birbirine Göre Durumları

Bir doğru ile bir düzlem için, üç durum söz konusudur.

1. Doğru düzleme paraleldir.
2. Doğru düzlemin içindedir.
3. Doğru düzlemi keser.

Bir  $d: \frac{x-x_1}{a} + \frac{y-y_1}{b} + \frac{z-z_1}{c}$  bir doğrusu ile bir  $w: Ax + By + Cz + D = 0$  düzlemi verilsin. Buna

göre, doğrunun doğrultmanı  $\vec{u} = (a, b, c)$  ve düzlemin normali ise  $\vec{N} = (A, B, C)$  olmak üzere, doğru ve düzlemin birbirlerine göre durumlarını inceleyelim [18].

### 2.8.1. Bir Doğrunun Bir Düzleme Paralel Olması

Yukarıda denklemleri verilen  $d$  doğrusu ile  $w$  düzleminin birbirine paralel olması için, doğrunun doğrultmanı ile düzlemin normalinin birbirine dik olması ve doğru üzerinde bulunan  $P(x_1, y_1, z_1)$  noktasının  $w$  düzleminde bulunmaması gerekir. Buna göre,

$$\text{Doğru} \parallel \text{Düzlem} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{N} \Leftrightarrow \langle \vec{u}, \vec{N} \rangle = 0 \Leftrightarrow aA + bB + cC = 0 \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \neq 0 \end{cases}$$

şeklinde ifade edebiliriz [18].

### 2.8.2. Bir Doğrunun Bir Düzlem İçinde Olması

Doğrunun tüm noktaları düzlem denklemini sağlamalıdır. Ayrıca, doğrunun doğrultmanı ile düzlemin normali birbirine dik olur. O halde,  $P(x_0, y_0, z_0)$  doğrunun bir noktası olmak üzere,

$$\text{Doğru düzlemin içindedir} \Leftrightarrow \begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \\ \vec{u} \perp \vec{N} \Leftrightarrow aA + bB + cC = 0 \end{cases}$$

şeklinde ifade edebiliriz [18].

### 2.8.3. Bir Doğrunun Düzlemle Bir Noktada Kesişmesi

Doğrunun düzlemle kesişmesinde, dik kesişmesini ayrıca inceleyelim. Doğrunun doğrultmanı ile düzlemin normali birbirine paralel olur. O halde,

$$\text{Doğru} \perp \text{Düzlem} \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{N} \Leftrightarrow \frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Diğer yandan, bir doğru ile düzlemin kesişme noktası; doğrunun parametrik denklemi kullanılarak, düzlem denkleminde yerine yazılır ve kesişme noktasında parametrenin değeri belirlenerek kesişme noktası bulunabilir.

Örneğin,  $\frac{x-x_1}{a} + \frac{y-y_1}{b} + \frac{z-z_1}{c} = \lambda$  doğrusunu,

$$x = a\lambda + x_1, y = b\lambda + y_1, z = c\lambda + z_1$$

biçiminde,  $\lambda$ 'ya bağlı olarak yazıp, düzlem denkleminde yerine yazarsak  $\lambda$  değeri bulunur. Kesişme noktasını bulmak için, geriye  $\lambda$  değerini yerine yazmak kalır [18].

## 2.9. Öklid İç Çarpımı

$R^n$  uzayında, bir  $\vec{u}$  vektörünün iç çarpımı,

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2$$

ile tanımlıdır. Vektörün uzunluğu;

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

olarak elde edilir. Vektörün uzunluğu ile iç çarpımı arasındaki ilişki

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$$

ile verilir [18,19].

## 2.10. İki Vektör Arasındaki Açık

$\vec{x}$  ve  $\vec{y}$ ,  $R^n$  uzayında iki vektör olsun.  $\vec{x}$  ve  $\vec{y}$  arasındaki açı  $\theta$  ise

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$$

eşitliği sağlanır [18].

## 2.11. İki Vektör ile Oluşturulan Paralelkenarın Alanı

$\vec{x}$  ve  $\vec{y}$ ,  $R^n$  uzayında iki vektör olsun.  $\vec{x}$  ve  $\vec{y}$  arasındaki açı  $\theta$  ise  $\vec{x}$  ve  $\vec{y}$  ile oluşturulan paralelkenarın alanı

$$Alan(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2}$$

elde edilir [18].

## 2.12. Üçgenin Alanı

Düzlemde köşelerinin koordinatları  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  ve  $C(x_3, y_3)$  olan üçgenin alanı

$$Alan(ABC) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

değerinin mutlak değeridir [18,19].

## 2.13. İzdüşüm Vektörünün Bulunması

$\vec{x}$  ve  $\vec{y} \in R^n$  sıfırdan farklı vektörleri verilsin.  $\vec{x}$  vektörünün,  $\vec{y}$  vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörü

$$\vec{x}_{izd} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle} \vec{y}$$

ile bulunur [19].

## 2.14. Vektörel Çarpım

Uzayda  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  ve  $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$  gibi iki vektörün vektörel çarpımı;

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2, -x_1y_3 + x_3y_1, x_1y_2 - x_2y_1)$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanıma göre, iki vektörün vektörel çarpımının sonucunda yeni bir **vektör** elde edilir [18].

## 2.15. Matrisler ve İşlemleri

$m \times n$  tane sayının,  $m$  satır ve  $n$  sütuna yerleştirilmesiyle oluşturulan tabloya bir matris denir. Genel olarak bir matris,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

şeklinde gösterilir.  $m \times n$  tipinde bir matris ve  $a_{ij}$  sayılarına da matrisin öğeleri denir.  $m \times n$  tipindeki bir matris, kısaca  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  şeklinde yazılır [25].

### 2.15.1. Satır ve Sütun Matrisi

$A$ ,  $m \times n$  tipinde bir matris olsun. Eğer  $m = 1$  ise, yani  $A$   $1 \times n$  tipinde bir matris ise  $A$  matrisine **satır matrisi**;  $n = 1$  ise, yani  $A$   $m \times 1$  tipinde bir matris ise  $A$  matrisine **sütun matrisi** denir [25].

$$A = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}] \text{ satır matrisi,} \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \text{ sütun matrisi}$$

### 2.15.2. Kare Matris

Bir matrister satır sayıısı ile sütun sayıısı eşıit ise bu matrise **kare matris** denir.  $n \times n$  tipindeki bir kare matrise,  $n$ . **mertebeden kare matris** denir. Ayrıca,  $n$ . mertebeden bir kare matrister,  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $a_{ii}$  öğelerine matrisin **köşegen öğeleri** denir [20].

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

kare matrisinin köşegen öğeleri  $a_{11}, a_{22}, a_{33}$  'tür.

### 2.15.3. Birim Matris

Bir kare matrisin köşegeni üzerindeki tüm öğeleri 1 ve geriye kalan bütün öğeleri 0 ise, bu matrise bir **birim matris** denir.  $n$ . mertebeden birim matris  $I_n$  ile gösterilir ve

$$I_n = (\delta_{ij})_{n \times n}, \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \text{ ise} \\ 0, i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde de ifade edilir.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri sırasıyla 2. ve 3. mertebeden birim matrislerdir [20, 25].

### 2.15.4. Bir Matrisin Transpozesi

Bir  $A$  matrisinin satırları ile sütunlarının yer değıştirilmesiyle elde edilen yeni matrise,  $A$  matrisinin **transpozesi** denir ve bu matris  $A^T$  ile gösterilir. Tanımdan anlaşılacağı gibi,  $m \times n$  tipindeki bir matrisin transpozesi  $n \times m$  tipindedir [20].

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad \text{ise} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

### 2.15.5. Matrislerde Toplama İşlemi

$A = (a_{ij})_{m \times n}$  ve  $B = (b_{ij})_{m \times n}$  matrislerinin toplamı bu matrislerin karşılıklı bileşenleri toplanarak elde edilen bir matristir. Yani,  $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$  dir. Mertebeleri farklı olan matrislerin toplamı tanımlı değildir [20].

### 2.15.6. Matrisleri Skaler ile Çarpma İşlemi

$A = (a_{ij})_{m \times n} \in R_n^m$  ve  $c \in R$  olmak üzere  $[ca_{ij}]_{m \times n} \in R_n^m$  matrisine  $A$  matrisinin  $c$  skaleri ile çarpımı denir ve  $c.A$  ile gösterilir. Böylece

$$c \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

olur [20].

### 2.15.7. Matris Toplamının ve Skaler ile Çarpma İşleminin Özellikleri

Her  $A, B, C \in R_n^m$  matrisleri ve her  $c, d \in R$  skalerleri için aşağıdakiler sağlanır [20]:

1.  $(A + B) + C = A + (B + C)$ ;
2.  $A + 0 = A = 0 + A$ ;
3.  $A + (-A) = 0 = (-A) + A$ ;
4.  $A + B = B + A$ ;

5.  $A + C = B + C \Rightarrow A = B$  ve  $A + B = A + C \Rightarrow B = C$ ;
6.  $c.(A + B) = c.A + c.B$ ;
7.  $(c + d).A = c.A + d.A$ ;
8.  $(cd).A = c.(d.A)$ ;
9.  $1, R$  'nin çarpma işlemine göre birim elemanı olmak üzere  $1.A = A$  'dır.

### 2.15.8. Matrislerde Çarpma İşlemi

$A$ ,  $m \times n$  tipinde bir matris ve  $B$ ,  $n \times p$  tipinde bir matris olsun.

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$  ve  $B = [b_{ij}]_{n \times p}$  olduğunu varsayalım.  $(i, k)$ .inci bileşeni

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

eşitliğiyle tanımlı olan  $[c_{ij}]_{m \times p}$  matrisine,  $A$  ile  $B$  matrisinin çarpımı denir ve  $AB$  ile gösterilir.

Herhangi  $A$  ve  $B$  matrisleri için çarpım tanımlı değildir. Bu matrislerin çarpılabilir olması için  $A$  'nın sütun sayısı  $B$  'nin satır sayısına eşit olmalıdır. Bu tanım kısaca

$$[a_{ij}]_{m \times n} [b_{ij}]_{n \times p} = \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right]_{m \times p}$$

eşitliği ile verilebilir. Matris çarpımı ile ilgili

1.  $A$ ,  $m \times n$  tipinde bir matris ve  $B$ ,  $n \times p$  tipinde bir matris ve  $C$ ,  $p \times r$  tipinde bir matris olmak üzere  $(AB)C = A(BC)$ ,
2.  $A$ ,  $m \times n$  tipinde bir matris ve  $B$ ,  $n \times p$  tipinde bir matris ve  $C$ ,  $n \times p$  tipinde bir matris olmak üzere  $A(B + C) = AB + AC$ ,
3.  $A$ ,  $m \times n$  tipinde bir matris ve  $B$ ,  $p \times m$  tipinde bir matris ve  $C$ ,  $p \times m$  tipinde bir matris olmak üzere  $(B + C)A = BA + CA$ ,

4.  $c$  bir skaler ve  $A$ ,  $m \times n$  tipinde bir matris ve  $B$ ,  $p \times m$  tipinde bir matris olmak üzere  $(c.A)B = c.(AB)$  ve  $A(c.B) = c.(AB)$ , özellikleri sağlanır [20].

### 2.15.9. Kare Matrislerin Çarpma İşlemine Göre Tersini

$A = (a_{ij})_{m \times n}$  biçimindeki kare matrislerin, çarpmaya göre tersini  $A^{-1}$  biçiminde gösteririz.

Determinantı sıfırdan farklı matrislerin tersi vardır.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ek matrisi bulunurken; her elemanın yerine kofaktörü yazılır ve elde edilen matrisin transpozunu alınır.

$$Ek(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Ek(A)$  ( $|A| \neq 0$ ) ile bulunur.  $A$ ,  $2 \times 2$ 'lik bir matris ise tersi  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  ise

$A^{-1} = \frac{1}{a.d - b.c} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$  ile bulunur. Matrisin tersi ve transpozunu ile ilgili

1.  $A$  kare matrisinin çarpmaya göre tersi varsa  $A^T$  matrisinin de çarpmaya göre tersi vardır ve  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ ,
2.  $A$   $n$ -inci mertebeden regüler bir matris ise  $A^{-1}$  de regülerdir ve  $(A^{-1})^{-1} = A$ ,
3.  $n$ -inci mertebeden  $A$  ve  $B$  regüler kare matrisleri için  $AB$  matrisinin de çarpmaya göre tersi vardır ve  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ,

özellikleri sağlanır [25].

## 2.15.10. Matrisin Determinantı

$A = [a_{ij}]_{n \times n} \in R^n$  kare matrisine bir reel skaler karşılık getiren ve  $\det A, |A|$  ya da

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

sembollerinden biri ile gösterilir. Determinant hesaplamaları için başlıca metotlar şunlardır:

1.  $2 \times 2$  tipindeki  $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$  matrisinin determinantı

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

'dir.

2. Sarrus Kuralı: Sadece  $3 \times 3$  tipindeki matrisin determinantının hesaplanmasında kullanılan bir metottur.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - [a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21}]$$

3. Kofaktör yardımıyla hesaplanması: Herhangi satır veya sütunu seçebiliriz. 2. Sütunu seçelim. Bu durumda,

$$\det A = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)[a_{21}a_{33} - a_{22}a_{31}]$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (1)[a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}]$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = (-1)[a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}]$$

ile hesaplanır [20].

## 2.16. Fibonacci- Lucas Sayıları ve Vektörlerinin Temel Özellikleri

**Tanım 2.16.1. (Fibonacci-Lucas Sayıları)** tüm  $n$  pozitif tamsayılar için  $n$ ' inci Fibonacci sayısı  $F_n$  ve Lucas sayısı  $L_n$  ile gösterilmek üzere ikinci dereceden tekrarlama bağıntısı ve başlangıç koşulları

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad F_1 = F_2 = 1,$$

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \quad L_1 = 1, \quad L_2 = 3$$

ile tanımlanır [14]. Fibonacci ve Lucas sayıları

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots, F_n, \dots$$

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \dots, L_n, \dots$$

olarak verilir.

**Teorem 2.16.1. (Binet Formülü)**  $x^2 - x - 1 = 0$  denkleminin kökleri  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , ve  $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

olmak üzere Fibonacci ve Lucas serisinin  $n$ . terimini veren Binet formülleri

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad \text{ve} \quad L_n = \alpha^n + \beta^n$$

ile tanımlanır. Burada  $\alpha + \beta = 1$ ,  $\alpha - \beta = \sqrt{5}$  ve  $\alpha\beta = -1$  eşitlikleri sağlanır. Ayrıca  $\alpha$ 'ya **altın oran** denilir [15,16].

**Teorem 2.16.2.** Fibonacci ve Lucas sayı dizileri için aşağıdaki özdeşlikleri verilebilir [14,16,17];

1)  $F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$ ,

2)  $F_{n+1}^2 - F_n^2 = F_{2n}$ ,

3)  $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ , (Cassini Formülü)

4)  $F_n F_m + F_{n+1} F_{m+1} = F_{n+m+1}$ ,

$$5) F_n F_{m+r} - F_{n+r} F_m = (-1)^m F_r F_{n-m},$$

$$6) F_n F_{m+1} - F_{n+1} F_m = (-1)^m F_{n-m},$$

$$7) F_n = L_{n-1} + L_{n+1},$$

$$8) F_{2n} = F_n L_n,$$

$$9) F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n,$$

$$10) L_{-n} = (-1)^n L_n,$$

**Tanım 2.16.2.** Her  $m$  pozitif tamsayıları ve her  $n$  tamsayıları için, Fibonacci ve Lucas vektörleri

$$\vec{F}_n^m = [F_n \ F_{n+1} \ F_{n+2} \dots F_{n+m-1}]^T \text{ ve } \vec{L}_n^m = [L_n \ L_{n+1} \ L_{n+2} \dots L_{n+m-1}]^T$$

ile tanımlanır. Burada  $F_n$ , ve  $L_n$  sırasıyla  $n$ 'inci Fibonacci ve Lucas sayılarıdır [14,23].

**Teorem 2.16.3.** Her  $m$  pozitif tamsayıları ve her  $n$  tamsayıları için,  $\vec{a} = [1 \ \alpha \ \alpha^2 \dots \alpha^{m-1}]^T$  ve  $\vec{b} = [1 \ \beta \ \beta^2 \dots \beta^{m-1}]^T$  olmak üzere her  $\vec{F}_n$  ve  $\vec{L}_n$  Fibonacci ve Lucas vektörleri için Binet formülleri

$$\vec{F}_n = \frac{1}{\alpha - \beta} (\alpha^n \vec{a} - \beta^n \vec{b}) \text{ ve } \vec{L}_n = \alpha^n \vec{a} + \beta^n \vec{b}$$

ile tanımlanabilir [14].

**Tanım 2.16.3. (İç çarpım)** Her  $m$  pozitif tamsayıları ve her  $n$  tamsayıları için  $\vec{F}_{n_1}^m$  ve  $\vec{F}_{n_2}^m$ , Fibonacci vektörleri ile  $\vec{L}_{n_1}^m$  ve  $\vec{L}_{n_2}^m$  Lucas vektörlerini alalım.

İki Fibonacci vektörü arasındaki Öklid iç çarpımı

$$\begin{aligned} \langle \vec{F}_{n_1}^m, \vec{F}_{n_2}^m \rangle &= F_{n_1} F_{n_2} + F_{n_1} F_{n_2} + \dots + F_{n_1+m-1} F_{n_2+m-1} \\ &= \begin{cases} F_m F_{n_1+n_2+m-1} & m \text{ çift ise} \\ \frac{1}{5} (L_m L_{n_1+n_2+m-1} - (-1)^{n_1} L_{n_2-n_1}) & m \text{ tek ise} \end{cases} \end{aligned}$$

iki Lucas vektörü arasındaki Öklid iç çarpımı

$$\begin{aligned} \langle \vec{L}_{n_1}^m, \vec{L}_{n_2}^m \rangle &= L_{n_1} L_{n_2} + L_{n_1} L_{n_2} + \dots + L_{n_1+m-1} L_{n_2+m-1} \\ &= \begin{cases} 5F_m F_{n_1+n_2+m-1} & m \text{ çift ise} \\ L_m L_{n_1+n_2+m-1} - (-1)^{n_1} L_{n_2-n_1} & m \text{ tek ise} \end{cases} \end{aligned}$$

bir Fibonacci ve bir Lucas vektörü arasındaki Öklid iç çarpımı

$$\begin{aligned} \langle \vec{F}_{n_1}^m, \vec{L}_{n_2}^m \rangle &= F_{n_1} L_{n_2} + F_{n_1} L_{n_2} + \dots + F_{n_1+m-1} L_{n_2+m-1} \\ &= \begin{cases} 5F_m F_{n_1+n_2+m-1} & m \text{ çift ise} \\ L_m F_{n_1+n_2+m-1} + (-1)^{n_1+1} F_{n_2-n_1} & m \text{ tek ise} \end{cases} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır [14].

**Tanım 2.16.4. (Norm)** Her  $m$  pozitif tamsayıları ve her  $n$  tamsayıları için  $\vec{F}_n^m$  Fibonacci vektörünün normu

$$\|\vec{F}_n^m\|^2 = \begin{cases} F_m F_{2n+m-1} & m \text{ çift ise} \\ \frac{1}{5} (L_m L_{2n+m-1} - 2(-1)^n) & m \text{ tek ise} \end{cases}$$

ve  $\vec{L}_n^m$  Lucas vektörünün normu

$$\|\vec{L}_n^m\|^2 = \begin{cases} 5F_m F_{2n+m-1} & m \text{ çift ise} \\ L_m L_{2n+m-1} + 2(-1)^n & m \text{ tek ise} \end{cases}$$

olarak tanımlıdır [14].

**Tanım 2.16.5. (Vektörel Çarpım)** Öklid 3-uzayının  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  ortonormal baz vektörleri olmak üzere  $\vec{F}_{n_1}$  ve  $\vec{F}_{n_2}$  Fibonacci 3-vektörleri olsun. İki Fibonacci vektörünün vektörel çarpımı

$$\vec{F}_{n_1} \wedge \vec{F}_{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ F_{n_1} & F_{n_1+1} & F_{n_1+2} \\ F_{n_2} & F_{n_2+1} & F_{n_2+2} \end{vmatrix} = (-1)^{n_1+1} F_{n_2-n_1} (-1, -1, 1)$$

ve iki Lucas 3-vektörünün vektörel çarpımı

$$\vec{L}_{n_1} \wedge \vec{L}_{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ L_{n_1} & L_{n_1+1} & L_{n_1+2} \\ L_{n_2} & L_{n_2+1} & L_{n_2+2} \end{vmatrix} = 5(-1)^{n_1+1} F_{n_2-n_1} (1, 1, -1)$$

bir Fibonacci ve bir Lucas 3-vektörleirnin vektörel çarpımı

$$\vec{F}_{n_1} \wedge \vec{L}_{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ F_{n_1} & F_{n_1+1} & F_{n_1+2} \\ L_{n_2} & L_{n_2+1} & L_{n_2+2} \end{vmatrix} = (-1)^{n_1} L_{n_2-n_1} (1, 1, -1)$$

olarak elde edilir [23].

**Sonuç 2.16.1.** Fibonacci ve Lucas vektörleri her zaman  $(1, 1, -1)$  vektörüne diktir.

**Sonuç 2.16.2.** Fibonacci ve Lucas vektörleri  $(1, 1, -1)$  normal vektörlü düzlemin içinde yer alırlar.

**Teorem 2.16.4.** [3]  $\vec{F}_{n_1}$ ,  $\vec{F}_{n_2}$  ve  $\vec{F}_{n_3}$  Fibonacci 3-vektörleri olsun. Bu üç vektörün skaler çarpımı sıfırdır, yani,

$$\langle \vec{F}_{n_1} \wedge \vec{F}_{n_2}, \vec{F}_{n_3} \rangle = 0$$

**Sonuç 2.16.3.** Bir paralel yüzlü Fibonacci vektörleri ile oluşturulamaz [26].

## 2.17. $E^n$ Uzayında Householder Dönüşümü

Householder dönüşümü en genel halde bulunduğu uzayın boyutuna göre, bir doğruya, bir düzleme veya bir hiper-düzleme göre yansıma hareketi yapan bir dönüşümdür. 1958'de Alston Scott Householder tarafından tanımlanmıştır.  $\vec{u}$  ve  $\vec{v}$  vektörleri  $E^n$  uzayında sıfır olmayan, farklı sütun vektörleri olsunlar.  $\vec{u}^t = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  ve  $\vec{v}^t = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  olmak üzere

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \vec{u}^t I_n \vec{v}$$

çarpımı Öklid iç çarpımı olarak tanımlanır [12]. Öklid iç çarpımına göre tanımlanan

$$\vec{v}^\perp = \{ \vec{w} \in R^{n \times 1} : \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle = 0 \}$$

kümesi,  $\vec{v}$  vektörüne ortogonal vektörlerin kümesini gösterir.  $\vec{u}$  vektörünün  $\vec{v}$  vektörü üzerine dik izdüşüm vektörü

$$izd_v(\vec{u}) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v}$$

ile bulunur [13]. Bu vektör  $r\vec{v}$ , ( $r \in R$ ) ile gösterilsin. Böylece, bir  $\mathcal{H}$  dönüşümü için

$$\mathcal{H}(\vec{u}) = \vec{u} - 2r\vec{v}$$

dönüşümüyle elde edilen vektörün  $\vec{u}$  vektörünün  $\vec{v}^\perp$  hiper-düzlemine göre yansıma vektörü olduğu sonucuna varılır. Bu şekilde elde edilen

$$\mathcal{H}(\vec{u}) = \vec{u} - 2 \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v}$$

dönüşümüne Householder dönüşümü, bu dönüşüme karşılık gelen  $\mathcal{H}$  matrisine de Householder matrisi adı verilir [12].

**Teorem 2.17.1.** Sıfırdan ve birbirinden farklı  $\vec{u}, \vec{v} \in E^n$  için,  $\vec{u}$  vektörünü  $\vec{v}^\perp$  hiper-düzlemine göre yansımaları veren Householder dönüşüme karşılık gelen Householder matrisi  $\mathcal{H}$  olmak üzere

$$\mathcal{H} = I - 2 \frac{\vec{v}\vec{v}^t}{\vec{v}^t\vec{v}}$$

ile bulunur [27].

### Örnek 2.17.1. Householder dönüşümü

$R^3$  uzayında verilen  $\vec{u} = (2, 3, 4)$  vektörünün,  $2x + 2y + z = 0$  düzlemine göre simetriği olan vektörü bulalım.

Simetriği olan vektörü bulmak için, Householder dönüşümü uygulanabilir.  $\vec{u}$  vektörünün  $2x + 2y + z = 0$  düzlemine göre simetriği olan vektörün bulunabilmesi için düzleme ortogonal bir vektör bulunması gereklidir; bu vektör  $\vec{v}$  şeklinde isimlendirilirse,  $\vec{v}$  için düzlemin normali seçilebilir. Böylece,  $v = (2, 2, 1)$  olur ve Householder matrisi de

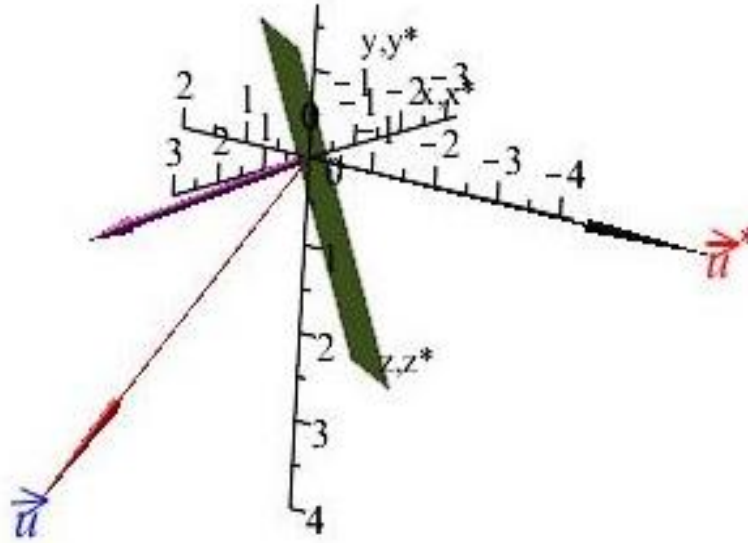
$$\mathcal{H} = I - 2 \frac{\vec{v}\vec{v}^t}{\vec{v}^t\vec{v}} = I - 2 \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{9} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

elde edilir ki, ortogonal, simetrik ve dolayısıyla tersi kendisine eşit bir matris olduğu kolayca görülebilir. Böylece,

$$\mathcal{H}(u) = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -38 \\ -29 \\ 8 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Sonuç aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 2.1 Householder Dönüşümü

### 3. BULGULAR

Tez çalışmamızda iki boyutlu uzaydaki, meyillenme, yerel ölçeklendirme, dönme, yansıma, öteleme dönüşümlerinin matris olarak ifadeleri verilmiştir. Üç boyutlu uzaydaki meyillendirme, yerel ölçeklendirme, dönme, yansıma, öteleme ve genel ölçeklendirme dönüşümlerinin matris kombinasyonları ifade edilmiştir. Dönüşümlerin Öklid uzayında olduğu gibi Fibonacci ve Lucas 3-vektörlerindeki uygulamaları incelenmiştir. Yapılan matris dönüşümlerinin Maple programında uygulamaları yapılmıştır. Fibonacci ve Lucas sayıları, Fibonacci ve Lucas vektörleri özellikleri, Householder dönüşümü ve özellikleri verilmiştir. m-boyutlu Fibonacci ve Lucas vektörleri için Householder dönüşümü tanımlanmıştır. Sonra Fibonacci ve Lucas 3-vektörleri için Householder dönüşümü verilmiştir. Ayrıca geometrik cisimler Maple programında oluşturulmuştur. Ayrıca dönüşümlerle ilgili Maple programında animasyon örnekleri verilmiştir. Böylece yapılan araştırmalar bilgisayar destekli tasarım ile bütünleştirilmiştir.

#### 3.1. İki Boyutlu Dönüşümler ve MAPLE Uygulamaları

##### 3.1.1. İki Boyutlu Noktaların Temsili

Bilgisayar Destekli Geometrik Tasarımda düzlemsel bir nokta iki boyutlu koordinatlarıyla 1x2 satır matrisi kullanarak

$$[x \ y]$$

ile temsil edilir. Üç boyutlu uzayda ise bir nokta 1 x 3 satır matris

$$[x \ y \ z]$$

ile gösterilir. İki boyutlu ve üç boyutlu bu satır matrisleri ayrıca **konum vektörleri** olarak adlandırılır. Alternatif olarak, iki ve üç boyutlu noktalar

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

sütun matrisleri ile temsil edilebilir [6].

### 3.1.2. Dönüşümler ve Matrisler

Matris elemanları, bir sayı deposu, bir ağ veya bir denklem kümesinin katsayıları gibi çeşitli miktarları temsil edebilir. Matris cebir kuralları, bu matrisler üzerinde izin verilen işlemleri tanımlar. Birçok fiziksel problem matris formülasyonu ile çözümlenir. Fiziksel sistem modelleri için, problem şu şekilde formüle edilmiştir:  $[T]$  dönüşüm matrisi olmak üzere  $[A]$  matrisinin  $[B]$  matrisine dönüştüren dönüşüm denklemi  $[A][T]=[B]$  ile verilir. Bu durumda dönüşüm matrisi  $[T]=[A]^{-1}[B]$  olarak da bulunabilir. Burada  $[A]^{-1}$  matrisi  $[A]$  kare matrisinin tersidir [4].

Alternatif bir yorum olarak  $[T]$  matrisi geometrik bir operatör olarak ele alınabilir. Burada  $[A]$ ' da bulunan matris çarpımı, içinde yer alan pozisyon vektörleri tarafından temsil edilen bir dizi nokta üzerinde geometrik bir dönüşüm gerçekleştirmek için kullanılır.  $[A]$  ve  $[T]$  matrislerinin bilindiği varsayıldığında  $[B]$  matrisinin elemanları belirlenebilir.  $[T]$  dönüşüm matrisinin geometrik bir operatör olarak yorumlanması, bilgisayar grafiklerinde yararlı olan matematiksel dönüşümlerin temelidir [6].

#### 3.1.2.1. Noktaların Dönüşümleri

$P$  noktasının koordinatlarını ve genel bir  $2 \times 2$  dönüşüm matrisini içeren  $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$  matrisinin çarpımının sonuçları

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} [T] = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (ax + cy) & (bx + dy) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

olarak elde edilir. Bu matematiksel gösterim,  $x$  ve  $y$  koordinatları yerine  $x^*$  ve  $y^*$  koordinatlarının  $x^*=(ax+cy)$  ve  $y^*=(bx+dy)$  olarak dönüştürülmesi anlamına gelir.  $P$  noktasının dönüştürülmüş koordinatları  $x^*$  ve  $y^*$  haline gelir. Birkaç özel durumu araştırarak başlayalım.

$a = d = 1$  ve  $b = c = 0$  olduğu durumu göz önünde bulundurulsun.  $[T]$  dönüşüm matrisi daha sonra birim matrise indirgenir [2]. Böylece,

$$[X][T] = [x \ y] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \ y] = [x^* \ y^*] \quad (3.2)$$

ve  $P$  noktasının koordinatlarında değişiklik olmaz. Matris cebirinde birim matrisi ile çarpma işlemi, sıradan cebirde 1 ile çarpma ile aynı olduğundan, bu sonuç beklenir [2,3].

İkinci durumda  $d = 1, b = c = 0$  olarak düşünüldüğünde

$$[X][T] = [x \ y] \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [ax \ y] = [x^* \ y^*] \quad (3.3)$$

sonucu elde edilir. Bundan sonra  $x^* = ax$  pozisyon vektörü  $x$  bileşeninde ölçeklendirme değişikliği meydana getirir. Bu dönüşümün etkisi Şekil 3.1a'da gösterilmektedir. Üçüncü durumda  $b = c = 0$  olarak düşünüldüğünde

$$[X][T] = [x \ y] \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = [ax \ dy] = [x^* \ y^*] \quad (3.4)$$

denklemleri elde edilir [2,3]. Bu, Şekil 3.1b'de gösterilen,  $P$  orijinal pozisyon vektörünün hem  $x$  hem de  $y$  koordinatlarının ölçeklendirilmesini sağlar.  $a \neq d$  ise ölçekler eşit değildir.  $a = d > 1$  ise, o zaman koordinatlarının tümünden büyüterek ölçeklenmesi sonucunda  $P$  oluşur.  $0 < a = d < 1$  ise,  $P$ 'de gösterilen koordinatlarının tümünden küçültülerek ölçeklenmesi oluşur [2,3].

$a$  ve/veya  $d$  negatif ise, bir eksen veya düzlem boyunca yansımalar meydana gelir. Bunu görmek için katsayıları  $b = c = 0, d = 1$  ve  $a = -1$  olarak düşünüldüğünde

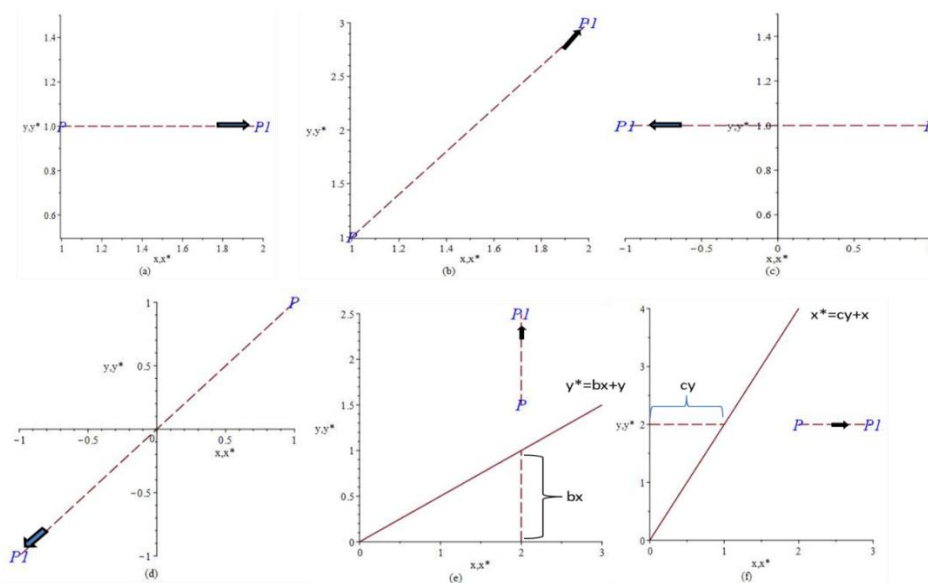
$$[X][T] = [x \ y] \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [-x \ y] = [x^* \ y^*] \quad (3.5)$$

elde edilir ve Şekil 3.1c'de gösterildiği gibi  $y$ -ekseni ile sonuçlanır. Eğer  $b = c = 0, a = 1$  ve  $d = -1$  o zaman  $x$ -ekseni boyunca bir yansıma meydana gelir. Eğer  $b = c = 0, a = d < 0$  öyleyse, orijinden bir yansıma meydana gelir. Bu, Şekil 3.1d'de  $a = -1, d = -1$  ile gösterilmiştir. Koordinatların hem yansımalarının hem de ölçeklendirilmesinin sadece dönüşüm matrisinin köşegen terimlerini içerdiğini unutmayalım [2,3].

Şimdi köşegen dışı terimlerin etkilerini düşünelim. İlk önce  $a = d = 1$  ve  $c = 0$  olarak düşünelim. Böylece,

$$[X][T] = [x \ y] \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \ (bx + y)] = [x^* \ y^*] \quad (3.6)$$

$P$  noktasının  $x$  koordinatının değişmediğine,  $y^*$ 'in orijinal koordinatlara doğrusal olarak bağlı olduğuna dikkat edelim. Bu etki, Şekil 3.1e'de gösterildiği gibi meyillendirme olarak adlandırılır [2,3]. Benzer şekilde, dönüşüm  $a = d = 1, b = 0$ , Şekil 3.1f'de gösterildiği gibi,  $y$  koordinatla orantılı bir kayma meydana getirmiştir. Böylece, köşegen dışı terimlerin  $P$  konum vektörünün koordinatları üzerinde meyillendirme etkisi yarattığını görüyoruz.



Şekil 3.1. Noktaların dönüşümü

### 3.1.2.2. Doğrular Dönüşümü

$A$  doğrusu, uç noktalarının koordinatlarını belirten iki konum vektörüyle tanımlanabilir. Bu iki noktayı birleştiren doğrunun konumu ve yönü, bu iki konum vektörü üzerinde çalışılarak değiştirilebilir [7].

İki boyutlu düzlemdeki  $A$  ve  $B$  noktaları arasındaki  $A$  doğrusu çizilir; Şekil 3.2.  $A$  ve  $B$  noktalarının konum vektörleri sırasıyla  $[A] = [0 \ 1]$  ve  $[B] = [2 \ 3]$ 'dir. Şimdi dönüşüm matrisini düşünelim;

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

daha önceki tartışmamızda hatırladığımız gibi meyillenme etkisi yaratır.  $A$  ve  $B$  konum vektörlerini dönüştürmek için  $[T]$  kullanılarak,

$$[A][T] = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = [3 \ 1] = [A^*] \quad (3.8)$$

$$[B][T] = [2 \ 3] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = [11 \ 7] = [B^*] \quad (3.9)$$

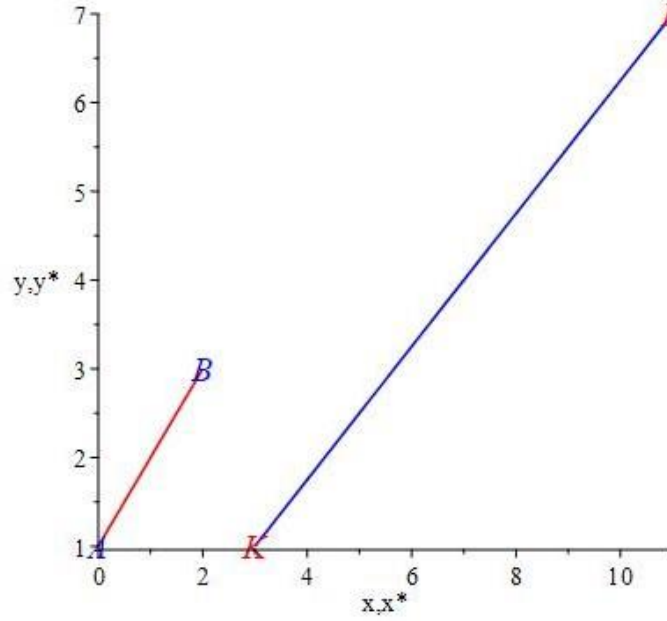
biçiminde yeni dönüştürülmüş  $A^*$  ve  $B^*$  konum vektörlerini üretir. Böylece, sonuçta ortaya çıkan koordinatlar  $A^*$  için  $x^* = 3$  ve  $y^* = 1$ 'dir. Benzer şekilde,  $B^*$  yeni koordinatlarıyla  $x^* = 11$  ve  $y^* = 7$ 'dir. Daha özet olarak;  $AB$  doğrusu,  $2 \times 2$ 'lik matris tarafından temsil edilebilir.

$$[L] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

için  $[T]$  ile temsil eden matris çarpımı,

$$[L][T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 7 \end{bmatrix} = [L^*] \quad (3.10)$$

$[L^*]$  bileşenlerinin dönüştürülmüş halini  $[K]$  ve  $[L]$  konum vektörleri temsil etmektedir.  $A$  'dan  $K$  ve  $B$  'den  $L$  dönüşümü Şekil 3.2.'de gösterilmektedir. İlk eksenler  $x, y$  ve dönüştürülen eksenler  $x^*, y^*$ 'dir. Şekil 3.2.  $[T]$  meyillenme dönüşümünün doğrunun uzunluğunu arttırdığını ve yönünü değiştirdiğini göstermektedir [6].



Şekil 3.2. Paralel doğruların dönüşümü

### 3.1.2.3. Orta Nokta Dönüşümü

Şekil 3.2.,  $2 \times 2$  dönüşüm matrisinin (bkz. denklem 3.7),  $y = x + 1$  doğrusunu  $A$  ve  $B$  noktaları arasında ve bir başka  $y = \left(\frac{3}{4}\right)x - \frac{5}{4}$  doğruyu  $A^*$  ve  $B^*$  arasında dönüştürdüğünü göstermektedir. Aslında,  $2 \times 2$  'lik bir matris herhangi bir doğruyu ikinci bir doğruya dönüştürür. İkinci doğrudaki noktalar, doğrunun noktaları ile bire bir benzerdir. Bunu daha da doğrulamak için  $A$  ve  $B$  arasındaki doğrunun orta noktasının dönüşümünü göz önüne alalım [8];

$$[A] = [x_1 \quad y_1] \quad [B] = [x_2 \quad y_2] \quad \text{ve} \quad [T] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

her iki noktayı da aynı anda uç noktalara dönüştürürsek,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} [T] &= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ax_1 + cy_1 & bx_1 + dy_1 \\ ax_2 + cy_2 & bx_2 + dy_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* \\ B^* \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla,  $A^*B^*$  doğrusunun dönüştürülen uç noktaları;

$$\begin{aligned}
[A^*] &= [ax_1 + cy_1 \quad bx_1 + dy_1] = [x_1^* \quad y_1^*] \\
[B^*] &= [ax_2 + cy_2 \quad bx_2 + dy_2] = [x_2^* \quad y_2^*]
\end{aligned} \tag{3.12}$$

olur. Dönüştürülen  $A^*B^*$  doğrusunun orta noktası,

$$\begin{aligned}
[x_m^* \quad y_m^*] &= \left[ \frac{x_1^* + x_2^*}{2} \quad \frac{y_1^* + y_2^*}{2} \right] \\
&= \left[ \frac{(ax_1 + cy_1) + (ax_2 + cy_2)}{2} \quad \frac{(bx_1 + dy_1) + (bx_2 + dy_2)}{2} \right] \\
&= \left[ a \frac{(x_1 + x_2)}{2} + c \frac{(y_1 + y_2)}{2} \quad b \frac{(x_1 + x_2)}{2} + d \frac{(y_1 + y_2)}{2} \right]
\end{aligned} \tag{3.13}$$

ile dönüştürülen uç noktalardan hesaplanır.  $AB$  orijinal doğrusuna dönmek için,

$$[x_m \quad y_m] = \left[ \frac{(x_1 + x_2)}{2} \quad \frac{(y_1 + y_2)}{2} \right] \tag{3.14}$$

orta nokta formülü kullanılır.  $AB$  orta noktasına  $[T]$  dönüşümü uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
[x_m \quad y_m][T] &= \left[ \frac{(x_1 + x_2)}{2} \quad \frac{(y_1 + y_2)}{2} \right] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\
&= \left[ a \frac{(x_1 + x_2)}{2} + c \frac{(y_1 + y_2)}{2} \quad b \frac{(x_1 + x_2)}{2} + d \frac{(y_1 + y_2)}{2} \right]
\end{aligned} \tag{3.15}$$

eşitliği elde edilir. (3.13) ve (3.15) eşitlikleri karşılaştırıldığında aynı oldukları görülür. Sonuç olarak,  $AB$  doğrusunun orta noktası,  $A^*B^*$  doğrusunun orta noktasına dönüşür. Bu işlem, farklı doğrulara tekrar tekrar uygulanabilir. Böylece  $AB$  ve  $A^*B^*$  doğrularındaki noktalar arasında önceden de belli olan bire bir benzerlikler sağlanır.

### Örnek 3.1.2.3.1. Bir Doğrunun Orta Noktası

> #Şekil 3.2.'de gösterilen  $AB$  doğrusunu göz önünde bulunduralım. Uç noktaların konum vektörleri

> **with(linalg):**

> **A:=matrix([[0,1]]); B:=matrix([[2,3]]);**

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$$

> **T:=matrix([[1,2],[3,1]]);#dönüşüm matrisi**

$$T := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

> **AB:=matrix([[0,1],[2,3]]);**

$$AB := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

> #KL dönüştürülen doğrunun uç noktalarının konum vektörlerini verir.

> **matrix(AB)\*matrix(T)=multiply(AB,T);**

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 7 \end{bmatrix}$$

> # $A^*B^*$ 'in orta noktası:

> **matrix([[x\_\_m]^\*(y\_\_m)^\*]):=matrix([[3+11]/(2),(1+7)/(2)]);**

$$\text{matrix}(\overline{[x_m, y_m]}) := \begin{bmatrix} 7 & 4 \end{bmatrix}$$

> #Orişinal dönüştürülmemiş doğrusunun orta noktası

> **matrix([[x\_\_m,y\_\_m]]):=matrix([[0+2]/(2),(1+3)/(2)]);**

$$\text{matrix}([x_m, y_m]) := \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

> #Bu orta noktayı dönüştürürsek önceki sonucumuzla aynı olur.

> **matrix([[x\_\_m,y\_\_m]])\*matrix(T)=multiply(matrix([[x\_\_m,y\_\_m]]),T);**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \end{bmatrix}$$

### 3.1.2.4. Paralel Doğruların Dönüşümü

Bir çift paralel doğruyu dönüştürmek için  $2 \times 2$ 'lik bir matris kullanıldığında, sonuç ikinci bir paralel doğru çiftidir. Bunu görmek için  $[A] = [x_1 \ y_1]$  ve  $[B] = [x_2 \ y_2]$  arasındaki  $AB$  doğrusu ile paralel  $E$  ve  $F$  arasındaki doğruyu düşünelim. Bu doğruların ve bunların dönüşümlerinin paralel olduğunu göstermek için  $AB$ ,  $EF$ ,  $A^*B^*$  ve  $E^*F^*$ 'ın eğimlerini inceleyelim. Paralel olduklarından  $AB$  ve  $EF$ 'nin de eğimi [9];

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (3.16)$$

oranı ile elde edilir.  $AB$  uç noktalarında  $2 \times 2$ 'lik genel bir dönüşüm kullanılması ile

$$\begin{aligned} [T] &= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ax_1 + cy_1 & bx_1 + dy_1 \\ ax_2 + cy_2 & bx_2 + dy_2 \end{bmatrix} \\ &\quad : \\ &= \begin{bmatrix} x_1^* & y_1^* \\ x_2^* & y_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* \\ B^* \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$A^*B^*$  uç noktaları elde edilir. Daha sonra  $A^*B^*$ 'ın dönüştürülen uç noktaları kullanılarak eğim

$$m^* = \frac{(bx_2 + dy_2) - (bx_1 + dy_1)}{(ax_2 + cy_2) - (ax_1 + cy_1)} = \frac{b(x_2 - x_1) + d(y_2 - y_1)}{a(x_2 - x_1) + c(y_2 - y_1)}$$

veya

$$m^* = \frac{b + d \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}}{a + c \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}} = \frac{b + dm}{a + cm} \quad (3.18)$$

ile hesaplanır.  $m^*$  eğimi,  $x_1, x_2, y_1$  ve  $y_2$  bağımsız olduğundan ve  $m, a, b, c$  ve  $d$ ;  $EF$  ve  $AB$  için aynı olduğundan  $m^*; E^*F^*$  ve  $A^*B^*$ 'ın her ikisi için de aynıdır. Böylece, paralel doğrular dönüşümden sonra paralel kalır. Bu genel bir  $2 \times 2$  dönüşüm matrisi tarafından uygulandığında, paralelkenarların diğer paralelkenarlara dönüşeceği anlamına gelir. Bu basit sonuçlar, grafik efektler üretmek için matris çarpımını kullanmanın etkisini göstermektedir [6,9].

### 3.1.2.5. Kesişen Doğruların Dönüşümü

Bir kesişen doğruyu dönüştürmek için genel  $2 \times 2$  bir matris kullanıldığında, sonuç aynı zamanda kesişen doğruların bir çiftidir. Bunu görmek için, Şekil 3.3.'teki kesikli doğrular gibi

$$y = m_1x + b_1$$

$$y = m_2x + b_2$$

denklemleri ile verilen bir çift doğru düşünelim. Bu denklemlerin matris notasyonunda yeniden düzenlenmesi ile

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -m_1 & -m_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$[X][M] = [B] \quad (3.19)$$

elde edilir. Bu denklem çiftinin bir çözümü varsa, doğrular kesişir. Eğer yoksa o zaman paraleldirler. Matris tersi ile bir çözüm elde edilebilir. Özellikle,

$$[X_i] = [x_i \quad y_i] = [B][M]^{-1} \quad (3.20)$$

$[M][M]^{-1} = [I]$  birim matrisi olduğundan  $[M]$ 'nin tersi

$$[M]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_2 - m_1} & \frac{m_2}{m_2 - m_1} \\ \frac{-1}{m_2 - m_1} & \frac{-m_1}{m_2 - m_1} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

olarak verilir. Dolayısıyla, iki doğrunun kesişme noktası,

$$[X_i] = [x_i \quad y_i] = [b_1 \quad b_2] \begin{bmatrix} \frac{1}{m_2 - m_1} & \frac{m_2}{m_2 - m_1} \\ -1 & -m_1 \\ \frac{1}{m_2 - m_1} & \frac{m_2}{m_2 - m_1} \end{bmatrix}$$

$$[X_i] = [x_i \quad y_i] = \left[ \frac{b_1 - b_2}{m_2 - m_1} \quad \frac{b_1 m_2 - b_2 m_1}{m_2 - m_1} \right] \quad (3.22)$$

ile bulunur. Bu iki doğru

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

verilen genel  $2 \times 2$  'lik dönüşüm matrisi kullanılarak dönüştürüldüğünde

$$y^* = m_1^* x^* + b_1^*$$

$$y^* = m_2^* x^* + b_2^*$$

olarak hesaplanır. Bu denklem sisteminden  $m_i^*$  ve  $b_i^*$  çekildiğinde

$$m_i^* = \frac{b + dm_i}{a + cm_i} \quad (3.23)$$

$$\text{ve } b_i^* = b_i (d - cm_i^*) = b_i \frac{ad - bc}{a + cm_i} \quad i = 1, 2 \quad (3.24)$$

elde edilir. Dönüştürülen doğruların kesişimi, dönüştürülmemiş doğrularla aynı şekilde elde edilir. Böylece,

$$[X_i^*] = [x_i^* \quad y_i^*]$$

$$= \left[ \frac{b_1^* - b_2^*}{m_2^* - m_1^*} \quad \frac{b_1^* m_2^* - b_2^* m_1^*}{m_2^* - m_1^*} \right]$$

olur. Kesişen noktanın bileşenlerinin (3.23) ve (3.24) denklemleri kullanılarak yeniden yazılmasıyla

$$\begin{aligned} [X_i^*] &= [x_i^* \quad y_i^*] \\ &= \left[ \frac{a(b_1 - b_2) + c(b_1 m_2 - b_2 m_1)}{m_2 - m_1} \quad \frac{b(b_1 - b_2) + d(b_1 m_2 - b_2 m_1)}{m_2 - m_1} \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

elde edilir. Şimdi dönüştürülmemiş kesişen  $[x_i \quad y_i]$  noktasına dönerek aynı genel  $2 \times 2$  dönüşümü uygulandığında

$$\begin{aligned} [X_i^*] &= [x_i^* \quad y_i^*][T] \\ &= \begin{bmatrix} \frac{b_1 - b_2}{m_2 - m_1} & \frac{b_1 m_2 - b_2 m_1}{m_2 - m_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \left[ \frac{a(b_1 - b_2) + c(b_1 m_2 - b_2 m_1)}{m_2 - m_1} \quad \frac{b(b_1 - b_2) + d(b_1 m_2 - b_2 m_1)}{m_2 - m_1} \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

elde edilir. (3.25) ve (3.26) denklemleri karşılaştırıldığında aynı olduklarını gösterir. Sonuç olarak, kesişme noktası başka bir kesişme noktasına dönüşür [6,10].

### Örnek 3.1.2.5.1. Kesişen Doğrular

> #Uç noktaları Şekil 1.2.'te gösterilen AB ve EF kesikli doğrularını göz önünde bulunduralım.

> **with(linalg):**

> **A:=matrix([[ -1,-1]]); B:=matrix([[3,5/3]]); E:=matrix([[ -1/2,3/2]]); F:=matrix([[3,-2]]);**

$$A := \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 3 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$E := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$F := \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix}$$

> #AB doğrusunun denklemi

> **y:=2/3\*x+(-1/3);**

$$y := \frac{2x}{3} - \frac{1}{3}$$

> #EF doğrusunun denklemi

> **y:=-x+1;**

$$y := -x + 1$$

> **restart;**

> #Matris notasyonunda doğru çifti ile temsil edilir.

> **XY:=matrix([[x,y]]);**

$$XY := \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$$

> **DOĞRU:=matrix([[ -2/3,1],[1,1]]);**

$$DOĞRU := \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

> **matrix(XY)\*matrix(DOĞRU)=[-1/3,1];**

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

> **with(linalg):**

> #Matris tersini kullanma, bu doğruların kesişimidir.

> **M:=matrix([[ -2/3,1],[1,1]]);**

$$M := \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

> **L:=inverse(M);**

$$L := \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

> **K:=matrix([[ -1/3,1]]);**

$$K := \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

> **matrix(K)\*matrix(L)=multiply(K,L);**

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

> **S:=matrix([[4/5,1/5]]);**

$$S := \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

> **T:=matrix([[1,2],[1,-3]]);#dönüşüm matrisi**

$$T := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

> **#Matris formunda dönüştürülmüş doğruların denklemleri ve kesişme noktası**

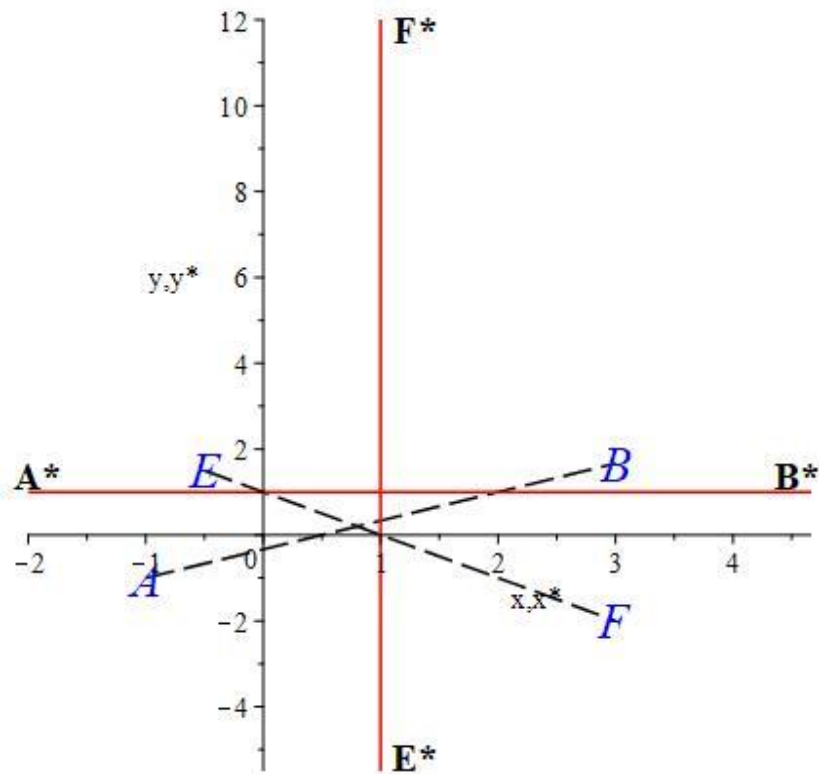
> **matrix([[x^\*,y^\*]])\*matrix([[1,0],[0,1]])=[1,1];**

$$\begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1, 1]$$

> **#Dönüştürülmeyen doğruların kesişme noktasını dönüştürmek, dönüştürülen doğruların kesişme noktasıyla aynıdır.**

> **matrix(S)\*matrix(T)=multiply(S,T);**

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Şekil 3.3. Kesişen doğruların dönüşümü

Şekil 3.3. dönüştürülmemiş orijinal  $AB$  ve  $EF$  kesikli doğru çiftinin dik olmadığını göstermektedir. Bununla birlikte, dönüştürülmüş doğrular diktir. Böylece,  $[T]$  dönüşümü bir çift kesişen dik olmayan doğruyu bir çift kesişen dik olan doğruya dönüştürdü. Sonuç olarak,  $[T]^{-1}$  dönüşümün tersi, kesişen dik olan doğrular çiftini kesişen dik olmayan doğrular çiftine dönüştürür. Bu nedenle, dik doğruların hangi koşullar altında dik doğrulara dönüştüğünü belirlemek geometrik anlamda önem taşımaktadır [6].

Şekil 3.3. ve Örn. 3.1.2.5.1.  $[T]$  dönüşümünün bir dönme, yansıma ve ölçeklendirme içerdiğini göstermektedir. Bu etkilerin her birini ayrı ayrı ele alalım.

### 3.1.2.6. Dönme

> # Şekil 3.4.'te gösterilen  $ABC$  üçgenini göz önünde bulunduralım.  $ABC$  üçgeni  $90^\circ$ 'lik dönüşüm tarafından orijin etrafında saatin tersi yönünde döndürelim.

> **with(linalg):**

> **T:=matrix([[0,1],[-1,0]]);#dönüşüm matrisi**

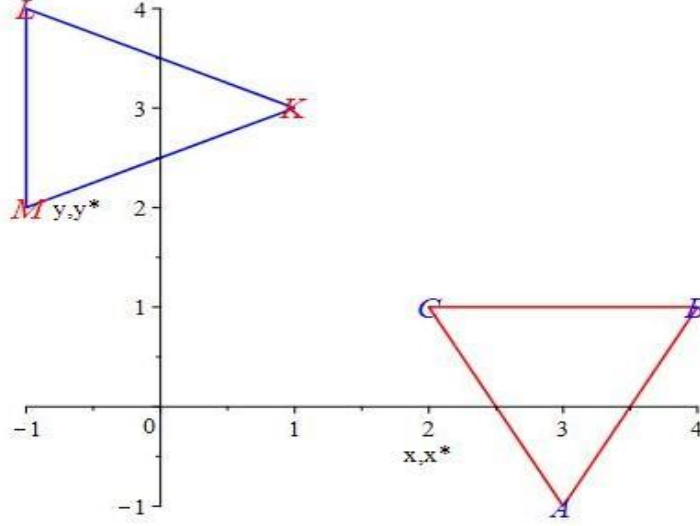
$$T := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

> **ABC:=matrix([[3,-1],[4,1],[2,1]]);**

$$ABC := \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

>**matrix(ABC)\*matrix(T)=multiply(ABC,T);#Üçgenin köşelerini içeren  $x$  ve  $y$  koordinatlarına  $3 \times 2$ 'lik bir matris uyguladığımızda,**

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$



**Şekil 3.4. Dönme**

Şimdi Şekil 3.4 de verilen  $KLM$  üçgeni orijin etrafında  $180^\circ$  döndürülmesiyle elde edilen dönüşüm matrisi

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ile verilir ve orijin etrafında  $270^\circ$  lik dönüşümde

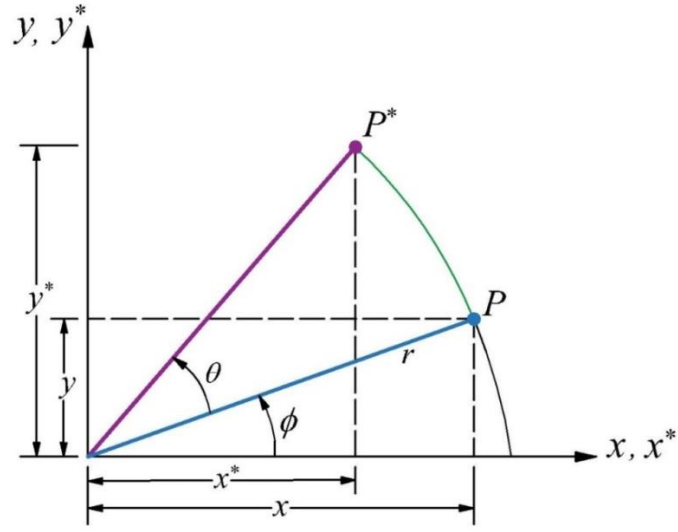
$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi oluşur. Tabii ki

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

birim matrisi orijin etrafında  $0^\circ$  ya da  $360^\circ$ 'lik bir dönüşüme karşılık gelir. Bu örneklerde ne ölçeklendirme ne de yansıma meydana gelmediğine dikkat edilmelidir.

Şekil 3.5.'te gösterilen  $P$  noktasının konum vektörünü göz önünde bulundurulduğunda konum vektörün uzunluğu  $r$  ve  $x$ -ekseni ile yaptığı açı  $\phi$  dir.  $P$  konum vektörü, orijin etrafında  $\theta$  açısı ile döndürüldüğünde  $P^*$  elde edilir [6].



Şekil 3.5. Konum vektörünün dönmesi

$P$  ve  $P^*$  için konum vektörleri;

$$P = [x \quad y] = [r \cos \phi \quad r \sin \phi]$$

ve  $P^* = [x^* \quad y^*] = [r \cos(\phi + \theta) \quad r \sin(\phi + \theta)]$

olarak tanımlanır. Açılarının toplamının kullanılmasıyla

$$P^* = [x^* \quad y^*] = [r(\cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \theta) \quad r(\cos \phi \sin \theta + \sin \phi \cos \theta)]$$

konum vektörü elde edilir.  $x$  ve  $y$  bileşenlerinin kullanılmasıyla

$$P^* = [x^* \quad y^*] = [x \cos \theta - y \sin \theta \quad x \sin \theta + y \cos \theta]$$

olacak şekilde  $P^*$  yeniden yazılabilir. Böylece, dönüştürülen nokta

$$x^* = x \cos \theta - y \sin \theta \tag{3.27a}$$

$$y^* = x \sin \theta + y \cos \theta \tag{3.27b}$$

bileşenlere sahiptir. Matris formunda ise

$$[X^*] = [X][T] = \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

olarak yazılır. Bu nedenle, orijin etrafında  $\theta$  açısıyla genel bir dönme için dönüşüm

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

matrisi ile verilir. Dönmeler, Şekil 3.5.'te gösterildiği gibi başlangıç noktası etrafında saat yönünün tersinde pozitifdir [1].

Genel dönme matrisinde determinant

$$\det [T] = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad (3.30)$$

olur. Genelde, determinantı +1'e eşit dönüşümler, has dönmeleri verir.

Şimdi  $P^*$  noktasını,  $P$ 'ye dönüştürmek istediğimizi varsayalım, yani ters dönüşümü gerçekleştirelim.  $\cos(-\theta) = \cos \theta$  ve  $\sin(-\theta) = -\sin \theta$  olmak üzere Eşitlik(3.29)'daki gerekli dönüşüm matrisi

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

olur.  $[T]^{-1}$  matrisi  $[T]$  matrisinin tersi olmak üzere

$$\begin{aligned} [T][T]^{-1} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta + \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta + \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [I] \end{aligned}$$

$[I]$  birim matrisi elde edilir.

(3.29) ve (3.30) eşitliklerinin incelenmesi, ilginç ve faydalı başka bir sonucu ortaya koyar. Bir matrisin transpozunun; satırları ve sütunlarını yer değiştirerek elde edildiğini hatırlayalım.  $[T]$ 'nin transpozunun oluşturulması, yani  $[T]^T$  ve  $[T]^{-1}$  ile karşılaştırılması

$$[T]^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = [T]^{-1} \quad (3.32)$$

eşitliğinin sağlandığını gösterir.  $[T]$  genel dönme matrisinin tersi, transpozudur. Bir matrisin tersini belirlemek, transpozunu belirlemekten daha zahmetli olduğundan, denklem (3.32) önemli bir sonuçtur. Genel olarak; herhangi bir saf dönme matrisinin tersi, yani determinanı +1 olan matrisin transpozudur. Bu tür matrisler ortogonaldır [6,10].

### Örnek 3.1.2.6.1. İki Boyutlu Dönme

> #Şekilde gösterilen yıldız göz önünde bulunduralım. Yıldız orijin etrafında saatin tersi yönünde 180°'lik dönme dönüşümü uygulayalım.

> **with(linalg):**

> **T:=matrix([[0,-1],[-1,0]]);#dönüşüm matrisi**

$$T := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

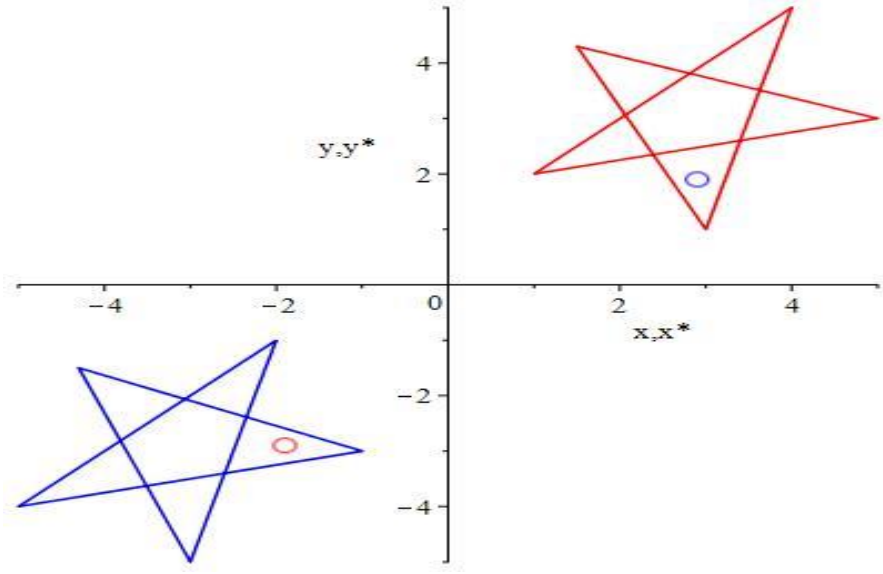
> **ABC:=matrix([[1,2],[5,3],[1.5,4.3],[3,1],[4,5],[1,2]]);**

$$ABC := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 1.5 & 4.3 \\ 3 & 1 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

> **matrix(ABC)\*matrix(T)=multiply(ABC,T);**

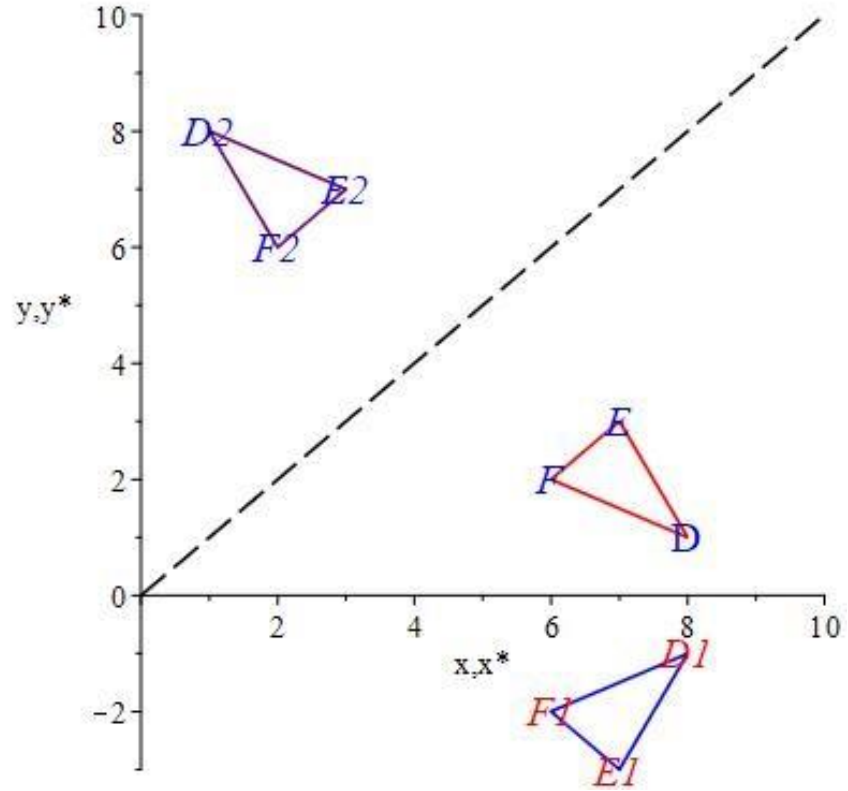
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 1.5 & 4.3 \\ 3 & 1 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -5 \\ -4.3 & -1.5 \\ -1 & -3 \\ -5 & -4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Yıldızın köşelerini içeren yeni koordinatlar yukarıdaki gibi olur.



Şekil 3.6. İki boyutlu dönme

### 3.1.2.7. Yansıma



Şekil 3.7. Yansıma

> # DEF üçgeninin iki yansıması, Şekil 3.7.'de gösterilmektedir. Yansıma  $y=0$ , x-ekseni, kullanılarak elde edilir.

> with(linalg):

> DEF:=matrix([[8,1],[7,3],[6,2]]);

$$DEF := \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

> T1:=matrix([[1,0],[0,-1]]);#dönüşüm matrisi

$$T1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

> matrix(DEF)\*matrix(T1)=multiply(DEF,T1);

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 7 & -3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

> #y=x doğrusunda yansıma oluşur.

> T2:=matrix([[0,1],[1,0]]);#dönüşüm matrisi

$$T2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

> matrix(DEF)\*matrix(T2)=multiply(DEF,T2);

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

olur. Benzer şekilde,  $y = -x$  doğrusunda bir yansıma,

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

dir. Bu yansıma matrislerinin her biri  $-1$  olan determinanta sahiptir. Genel olarak, bir dönüşüm matrisinin determinanı  $-1$  ise, dönüşüm yansıma oluşturur [6].

### Örnek 3.1.2.7.1. İki Boyutlu Yansıma

> # Şekilde gösterilen yıldızı, y-ekseninde yansıtalım:

> with(linalg):

> DEF:=matrix([[1,2],[5,3],[1.5,4.3],[3,1],[4,5],[1,2]]);

$$DEF := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 1.5 & 4.3 \\ 3 & 1 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

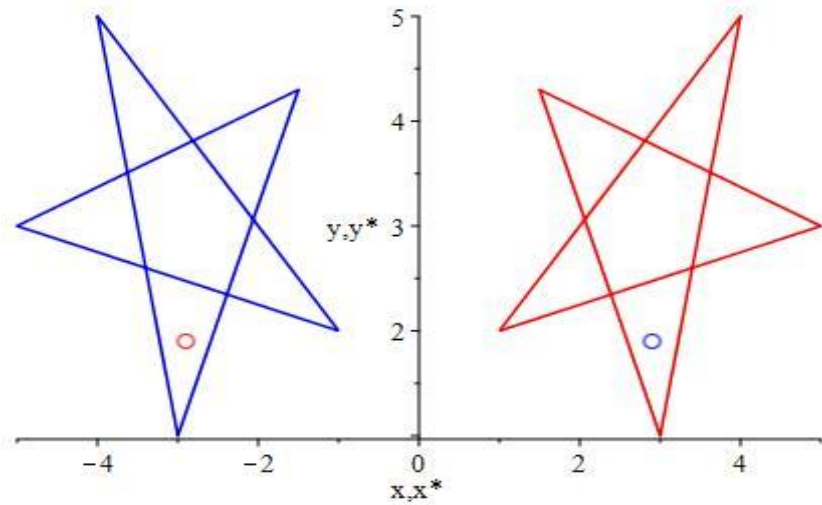
> T1:=matrix([[-1,0],[0,1]]);#dönüşüm matrisi

$$T1 := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> matrix(DEF)\*matrix(T1)=multiply(DEF,T1);

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 1.5 & 4.3 \\ 3 & 1 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 3 \\ -1.5 & 4.3 \\ -3 & 1 \\ -4 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Yıldızın köşelerini içeren yeni koordinatlar yukarıdaki gibi olur.



Şekil 3.8. İki boyutlu yansıma

### Örnek 3.1.2.7.2. Yansıma ve Dönme

> # Şekil 3.9.'da gösterilen ABC üçgenini göz önünde bulunduralım, önce x-ekseni ve sonra  $y=-x$  doğrusuna yansıtalım. Özel olarak, x-eksenindeki yansıma sonucunu bulalım:

> **with(linalg):**

> **ABC:=matrix([[4,1],[5,2],[4,3]]);**

$$ABC := \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

> **T1:=matrix([[1,0],[0,-1]]);#dönüşüm matrisi**

$$T1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

> **matrix(ABC)\*matrix(T1)=multiply(ABC,T1);**

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

> **#Daha sonra  $y=-x$  doğrusunda yansıtalım.**

> **DEF:=matrix([[4,-1],[5,-2],[4,-3]]);**

$$DEF := \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

> **T2:=matrix([[0,-1],[-1,0]]);#dönüşüm matrisi**

$$T2 := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

> **matrix(DEF)\*matrix(T2)=multiply(DEF,T2);**

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

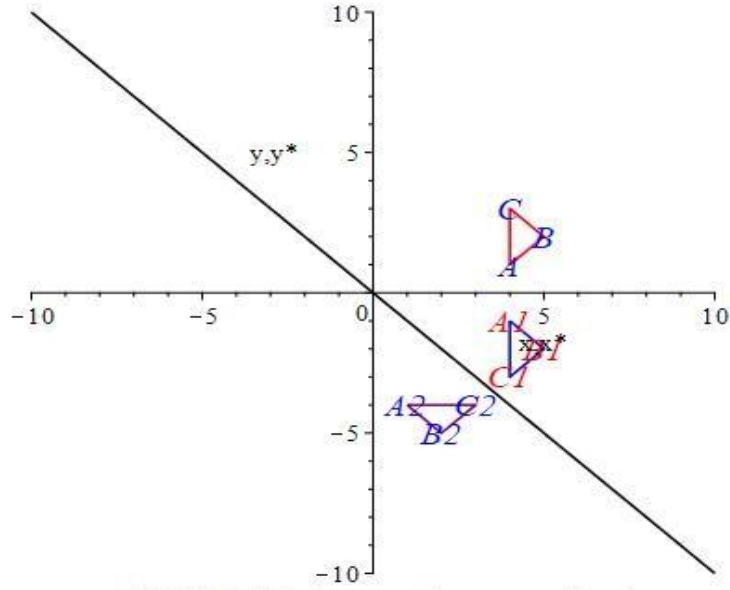
> **#Orijin etrafında  $\theta=270^\circ$  açıyla dönme aynı sonucu verir.**

> **T3:=matrix([[0,-1],[1,0]]);#dönüşüm matrisi**

$$T3 := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

> **matrix(ABC)\*matrix(T3)=multiply(ABC,T3);**

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$



Şekil 3.9. Birleşik yansımalar sonucu dönmeler

Yukarıda verilen yansıma matrislerinin ortogonal olduğuna dikkat edelim; yani, transpozu, aynı zamanda tersidir [6,7,8]. Örneğin,

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

olarak elde edilir.

### 3.1.2.8. Ölçeklendirme

Ölçeklendirme matrisin esas köşegenindeki iki terimin büyüklüğü ile kontrol edilir. Eğer

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisi üçgenin köşelerinde operatör olarak kullanılırsa, orijin etrafında “2 kat genişleme” veya “tek tip ölçeklendirme” oluşur. Büyüklükler eşit değilse, **bozulma** meydana gelir. Bu Şekil 3.10.’da gösterilmektedir.  $ABC$  üçgenine dönüşüm uygulanıldığında tek tip bir ölçeklendirme gerçekleştiğinden  $A_1B_1C_1$  verir.  $ABC$  üçgeninin koordinatlarının

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisi ile dönüştürülmesiyle,  $DEF$  üçgeninde düzensiz ölçek faktörleri nedeniyle bozulma olur. Genel olarak, eğer

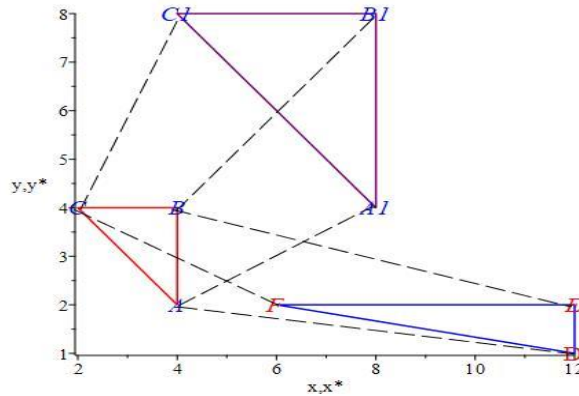
$$[T] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$a = d, b = c = 0$ , ise düzgün bir ölçeklendirme meydana gelir ve eğer  $a \neq d, b = c = 0$  ise **düzensiz bir ölçeklenme** meydana gelir. Düzgün bir ölçeklendirme için, eğer  $a = d > 1$  ise **düzgün bir genişleme** meydana gelir; yani şekil daha da büyür. Eğer  $a = d < 1$  ise o zaman **düzgün bir daralma** meydana gelir; yani şekil daha da küçülür. Düzgün olmayan genişleme ve daralma  $a$  ve  $d$  'nin ayrı ayrı  $> 1$  veya  $< 1$  olmasına bağlı olarak meydana gelir [10].

$ABC$  'nin  $DEF$  'ye dönüşümünü daha dikkatlice inceleyelim. Özellikle,

$$[X^*] = [X][T] = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 12 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}$$

$DEF$  üçgeninin konum vektörlerinin  $x$  bileşenlerinin her birinin 3 ölçekleme faktörü ile artırılıp ve bu konum vektörlerinin  $y$  bileşenlerinin 2 ölçekleme faktörü ile azaldığına dikkat edelim.

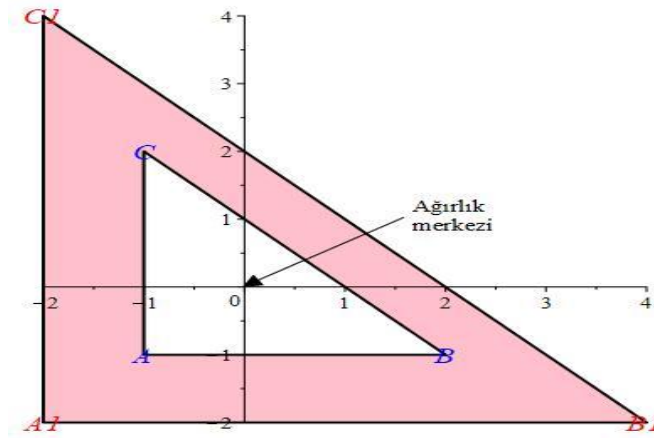


Şekil 3.10. Düzgün ve düzensiz ölçekleme veya bozulma

Aşık ar öteleme olmadan has bir ölçeklendirme elde etmek için, şeklin ağırlık merkezinin orijinde olması gerekir. Bu etki, Şekil 3.11.'de gösterilmektedir, burada  $ABC$  üçgeninin merkezci koordinatları ( $\frac{1}{3}$  taban ve  $\frac{1}{3}$  yükseklik) orijinde 2 faktörü ile ölçeklendirilir [6]. Özellikle,

$$[X^*] = [X][T] = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

sonucu elde edilir.



Şekil 3.11. Görünür meyillenme olmadan tek tip ölçeklendirme

### Örnek 3.1.2.8.1. İki Boyutlu Ölçeklendirme

> # Şekil 3.12.'de gösterilen ABCDEF yıldızına köşe koordinatlarını kullanarak, orijin etrafında "3 kat genişletme" dönüşümü uygulayalım:

> **with(linalg):**

> **A:=matrix([[1,2],[5,3],[1.5,4.3],[3,1],[4,5],[1,2]]);**

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 1.5 & 4.3 \\ 3 & 1 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

> **T1:=matrix([[3,0],[0,3]]);#dönüşüm matrisi**

$$T1 := \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

> **matrix(A)\*matrix(T1)=multiply(A,T1);**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 1.5 & 4.3 \\ 3 & 1 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 15 & 9 \\ 4.5 & 12.9 \\ 9 & 3 \\ 12 & 15 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

> # Yeni koordinatlar  $A'B'C'D'E'F'$  olur.

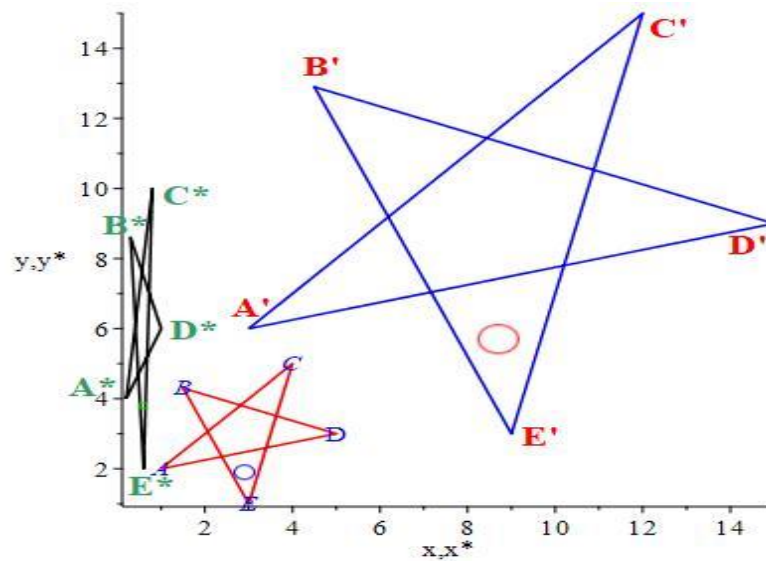
> **T2:=matrix([[1/5,0],[0,2]]);#düzensiz ölçeklendirme**

$$T2 := \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

> **matrix(A)\*matrix(T2)=multiply(A,T2);**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 1.5 & 4.3 \\ 3 & 1 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 4 \\ 1 & 6 \\ 0.3000000000 & 8.6 \\ \frac{3}{5} & 2 \\ \frac{4}{5} & 10 \\ \frac{1}{5} & 4 \end{bmatrix}$$

> # Yeni koordinatlar  $A^*B^*C^*D^*E^*F^*$  olur. Düzensiz ölçek faktörleri nedeniyle bozulma olur.



Şekil 3.12. İki boyutlu ölçeklendirme

### 3.1.2.9. Birleştirilmiş Dönüşümler

Matris çarpımı değişmeli olmadığı için, dönüşümlerin uygulama sırası önemlidir [5]. Değişmeli olmayan matris çarpımının etkisini göstermek için,  $[x \ y]$  konum vektörü üzerinde dönme ve yansıma işlemlerini göz önünde bulunduralım.  $90^\circ$ 'lik dönme dönüşümü  $[T_1]$ 'i,  $y = -x$  doğrusunda  $[T_2]$  yansıma dönüşümü izlerse bu iki ardışık dönüşüm;

$$[X'] = [X][T_1] = [x \ y] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = [-y \ x]$$

olur ve daha sonra

$$[X^*] = [X'][T_2] = [-y \ x] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = [-x \ y]$$

ile gösterilir. Öte yandan, yansımayı dönme takip ederse, sonuçlar;

$$[X'] = [X][T_2] = [x \ y] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = [-y \ -x]$$

ve 
$$[X^*] = [X'][T_1] = [-y \ -x] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = [x \ -y]$$

olarak elde edilir. Sonuçlar farklıdır ve matris dönüşümlerinin uygulama sırasının önemli olduğunu teyit eder. Yukarıda arka arkaya uygulanan dönüşüm matrisleri sonucu elde edilen konum vektörleri

$$[x \ y][T_1] \rightarrow [x' \ y'] \quad \text{ve} \quad [x' \ y'][T_2] \rightarrow [x^* \ y^*]$$

ile gösterilir. Aşağıdaki örnekte, ayrı dönüşümler önce birleştirilir sonra birleştirilen dönüşüm orijinal konum vektörüne uygulanırsa;

$$[T_1][T_2] \rightarrow [T_3] \text{ ve } [x \ y][T_3] \rightarrow [x^* \ y^*]$$

olur.

### Örnek 3.1.2.9.1. Birleştirilmiş İki Boyutlu Dönüşümler

> # ABC üçgenini, +90° döndürelim:

> **with(linalg):**

> **T1:=matrix([[0,1],[-1,0]]);#dönüşüm matrisi**

$$T1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

> #y=-x doğrusunda yansıtalım.

> **T2:=matrix([[0,-1],[-1,0]]);#dönüşüm matrisi**

$$T2 := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

> # [T3]=[T1].[T2] birleştirilmiş dönüşümünün, ABC üçgeni üzerindeki etkisi

> **ABC:=matrix([[2,2],[4,2],[4,4]]);**

$$ABC := \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

> **matrix(ABC)\*matrix(T1)\*matrix(T2)=multiply(ABC,T1,T2);**

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

> # Nihai sonuç, Şekil 3.13.'teki gibi  $A^*B^*C^*$  ve ara sonuç  $A'B'C'$  olarak gösterilmiştir.

> #Dönüşümün uygulama sırasını tersine çevirme

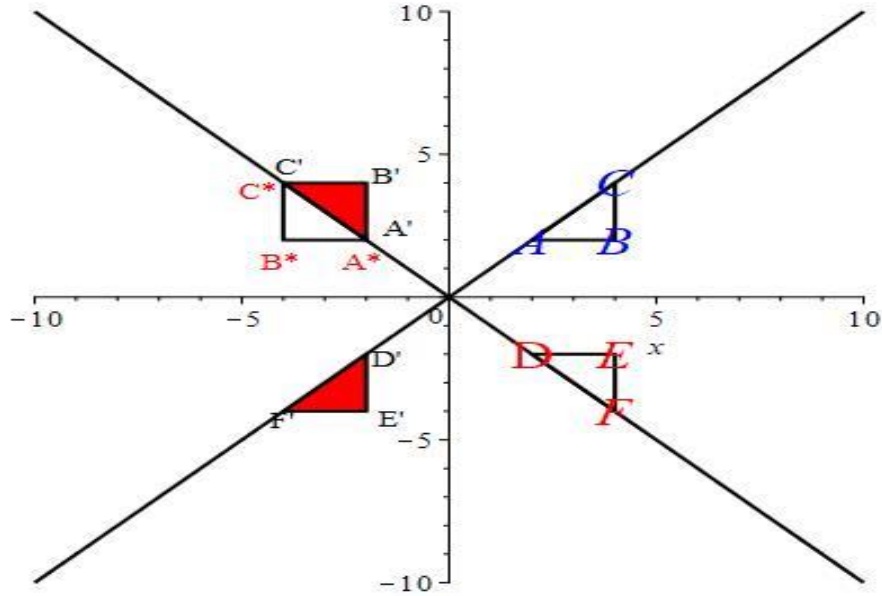
> # [X]=[x].[T2].[T1]=[x].[T4]

> **matrix(ABC)\*matrix(T2)\*matrix(T1)=multiply(ABC,T2,T1);**

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

> # Nihai sonuç, Şekil 3.13.'teki gibi  $DEF$  ve ara sonuç  $D'E'F'$  olarak gösterilmiştir.

Sonuçların farklı olduğu görülmektedir, bu durum yine dönüşümlerin uygulama sırasının önemli olduğunu teyit eder. Ayrıca  $\det[T_3] = -1$  ve  $\det[T_4] = -1$ , her iki sonucun da tek bir yansıma ile elde edilebileceğini gösterir.  $A^*B^*C^*$ ,  $ABC$ 'nin  $y$ -eksenine göre yansıması ile elde edilebilir.  $DEF$ ,  $ABC$ 'nin  $x$ -eksenine göre yansıması ile elde edilebilir [5,6].



Şekil 3.13. Birleştirilmiş iki boyutlu dönüşümler (Üçgen için)

#### Örnek 3.1.2.9.2. Birleştirilmiş Dönüşümler

> # Şekil 3.14.'te gösterilen  $ABCDEF$  yıldızını göz önünde bulunduralım. İki dönüşümden biri orijin etrafında  $+90^\circ$  dönme:

> **with(linalg):**

> **T1:=matrix([[0,1],[-1,0]]);#dönüşüm matrisi**

$$T1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

> # $y=x$  doğrusunda yansıtalım.

> **T2:=matrix([[0,1],[1,0]]);#dönüşüm matrisi**

$$T2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

> # $[T3]=[T1].[T2]$  birleştirilmiş dönüşümünün, yıldız üzerindeki etkisi

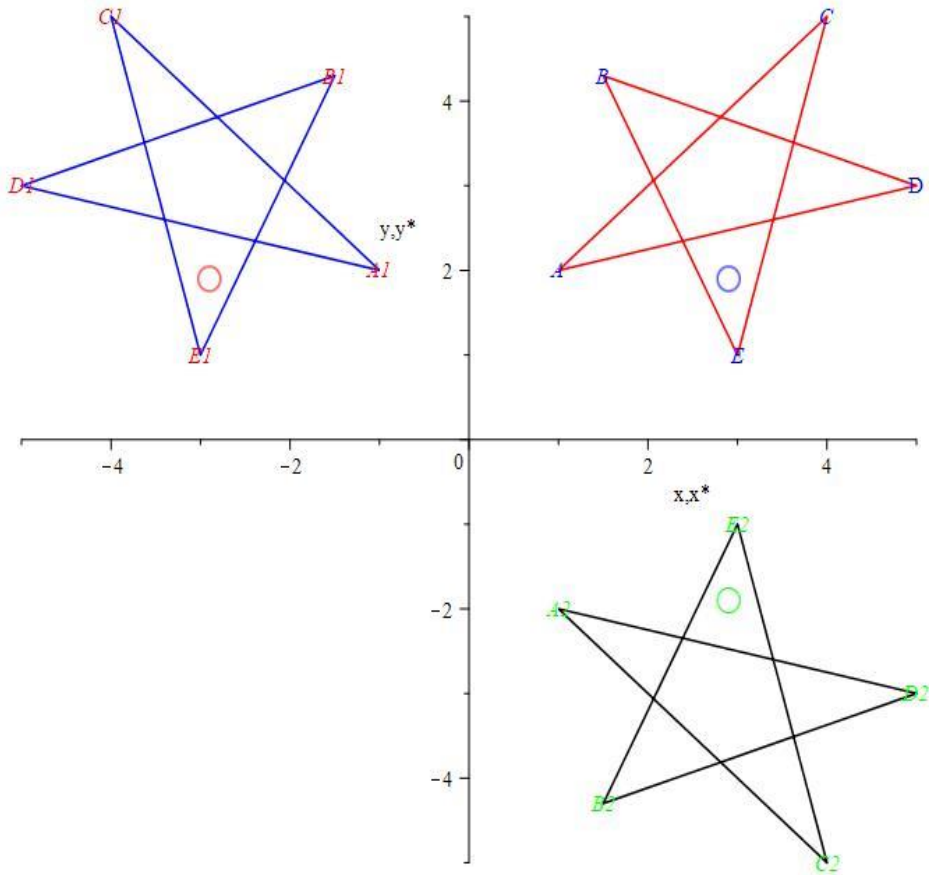
> **A:=matrix([[1,2],[5,3],[1.5,4.3],[3,1],[4,5],[1,2]]);**

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 1.5 & 4.3 \\ 3 & 1 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

> **matrix(A)\*matrix(T1)\*matrix(T2)=multiply(A,T1,T2);**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 1.5 & 4.3 \\ 3 & 1 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -3 \\ 1.5 & -4.3 \\ 3 & -1 \\ 4 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

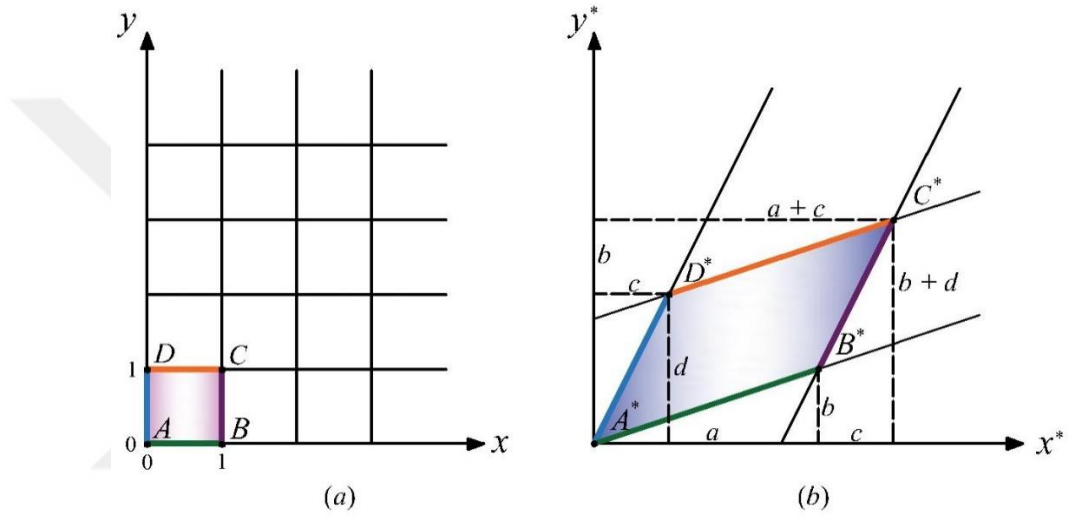
Nihai sonuç, şekildeki gibi  $A_2B_2C_2D_2E_2$  olarak gösterilmiştir.



Şekil 3.14. Birleştirilmiş iki boyutlu dönüşümler (Yıldız için)

### 3.1.2.10. Birim Kare Dönüşümü

Şimdiye kadar basit matris dönüşümlerinin etkisini belirlemek için nokta ve doğruların davranışına odaklandık. Bununla birlikte, düzlemdeki her nokta için dönüşüm matrisi doğru çalışmaktadır. Görüldüğü gibi, bir  $2 \times 2$  matris dönüşümü altında değişmeyen tek nokta orijindir ve düzlem içindeki diğer tüm noktalar dönüştürülür. Bu dönüşüm, orijinal düzlemin ve koordinat sisteminin yeni bir şekle dönüştürülmesi olarak yorumlanabilir. Başka bir deyişle, dönüşüm bir koordinat uzayından ikincisine fonksiyona (dönüşüm) neden olur [6,9].



Şekil 3.15. Birim karenin genel dönüşümü. (a) dönüşümden önce; (b) dönüşümden sonra

Şekil 3.15 'te gösterildiği gibi  $xy$  düzleminde birim karenin dönüşümünü düşünelim. Bir köşesi koordinat sisteminin başlangıç noktasında olan birim karenin dört konum vektörü;

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	orijin koordinatları – $A$ $x$ -ekseni üzerindeki birim noktası- $B$ dış köşesi- $C$ $y$ -ekseni üzerindeki birim noktası- $D$
--	---

olur. Bu birim kare, Şekil 3.15'a'da gösterilmiştir. Birim kareye genel bir  $2 \times 2$ 'lik matris dönüşümünün uygulanması ile

$$\begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \\ a+c & b+d \\ c & d \end{bmatrix} \begin{matrix} A^* \\ B^* \\ C^* \\ D^* \end{matrix} \quad (3.35)$$

elde edilir. Bu dönüşümün sonucu Şekil 3.15b'de gösterilmektedir. (3.35) eşitliğinden orijinin dönüşümden etkilenmediğini, yani  $[A] = [A^*] = [0 \ 0]$  olduğunu görüyoruz. Ayrıca,  $B^*$  koordinatlarının genel dönüşüm matrisinin birinci satırına eşit olduğuna ve  $D^*$  koordinatlarının genel dönüşüm matrisinin ikinci satırına eşit olduğuna dikkat edelim. Böylece  $B^*$  ve  $D^*$  (dönüştürülen birim vektörler sırasıyla  $[1 \ 0]$  ve  $[0 \ 1]$ ) koordinatları bilindikten sonra, genel dönüşüm matrisi belirlenir. Birim karenin kenarları orijinal olarak paralel olduğundan ve paralel doğruların paralel doğrulara dönüştüğünü daha önce gösterdiğimizden, dönüştürülen şekil bir paralelkenardır [6].

$a, b, c$  ve  $d$  terimlerinin,  $2 \times 2$ 'lik matrisindeki etkisi ayrı ayrı tanımlanabilir. Şekil 3.15b'de görüldüğü gibi, ilk karenin  $b$  ve  $c$  terimleri sırasıyla  $y$  ve  $x$  yönlerinde bir meyillenmeye sebep olmaktadır.  $a$  ve  $d$  terimleri daha önce belirtildiği gibi ölçek faktörleri olarak hareket eder. Bu nedenle, genel  $2 \times 2$ 'lik matrisi, meyillenme ve ölçeklendirme birleşiminden oluşur.

Şekil 3.15b'de gösterilen  $A^*B^*C^*D^*$  paralelkenarının alanını kolayca belirlemek de mümkündür. Paralelkenarın alanı

$$A_p = (a+c)(b+d) - \frac{1}{2}(ab) - \frac{1}{2}(cd) - \frac{c}{2}(b+b+d) - \frac{b}{2}(c+a+c)$$

ile hesaplanabilir [6,12]. Böylece;

$$A_p = ad - bc = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

bir karenin dönüştürülmesiyle oluşturulan herhangi bir paralelkenarın alanı  $A_p$  ile gösterilebilir, dönüşüm matrisinin determinanı ve ilk karenin alanı

$$A_p = A_s (ad - bc) = A_s \det [T] \quad (3.37)$$

eşitliğinde görüldüğü gibi  $A_s$  ile bağlantılıdır. Aslında, genel bir şeklin alanı, birim karelerin toplamı olduğundan; dönüştürülen herhangi bir şeklin alanı  $A_t$ , ilk şeklin alanı

$$A_t = A_s (ad - bc) \quad (3.38)$$

eşitliğinde görüldüğü gibi  $A_t$  ile ilgilidir [6,12]. Bu, rastgele şekillerdeki alanları belirlemek için yararlı bir tekniktir.

### Örnek 3.1.2.10.1. Alan Ölçeklendirme

>  $ABC$  üçgeninin köşelerinin koordinatları  $[1 \ 0]$ ,  $[0 \ 1]$  ve  $[-1 \ 0]$ 'dir. Konum vektörlerine,

> **with(linalg):**

> **T:=matrix([[3,2],[-1,2]]);#dönüşüm matrisi uygulanır.**

$$T := \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

> **#ABC üçgeninin alanı**

> **A:=1/2\*2\*1;**

$$A := 1$$

> **#A'B'C' üçgeninin alanı**

> **det(T);**

$$8$$

> **(A1):=1\*8;**

$$A1 := 8$$

> **#Şimdi dönüştürülen üçgenin köşeleri**

> **ABC:=matrix([[1,0],[0,1],[-1,0]]);**

$$ABC := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

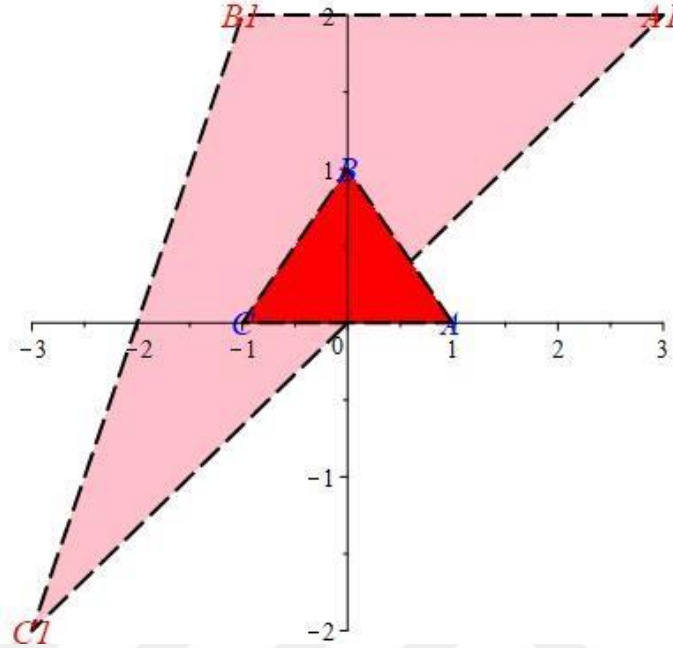
> **matrix(ABC)\*matrix(T)=multiply(ABC,T);**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

> #Alanın dönüştürülmüş köşelerden hesaplanması

>  $A1 := 1/2 * 4 * 4;$

$A1 := 8$



Şekil 3.16. Alan ölçeklendirme

### 3.1.2.11. Öteleme ve Homojen Koordinatlar

Koordinat sisteminin orijini, bu dönüşümlerin tümü bakımından değişmezdir. Bununla birlikte orijinin konumunu değiştirebilmek, iki boyutlu düzlemdeki her noktayı dönüştürmek için gereklidir. İki boyutlu düzlemdeki orijin veya herhangi bir nokta,

$$x^* = ax + cy + m$$

$$y^* = bx + dy + n$$

denklem sistemini sağlar. Ne yazık ki,  $m, n$  dönüşüm sabitlerini;  $2 \times 2$ 'lik genel dönüşüm matrisiyle göstermek mümkün değildir.

Homojen koordinatlar eklenerek bu zorluğun üstesinden gelinir.  $[x \ y]$  homojen olmayan bir konum vektörünün homojen koordinatları;  $[x' \ y' \ h]$  olur. Buradan  $x = x'/h$  ve  $y = y'/h$ 'dir. Bir **homojen koordinat grubu** daima  $[x \ y \ 1]$  formundadır [6].

$3 \times 3$ 'lük genel dönüşüm matrisi;

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

ile gösterilir. Salt iki boyutlu öteleme matrisi,

$$[x^* \ y^* \ 1] = [x \ y \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix} = [x+m \ y+n \ 1] \quad (3.40)$$

olur. Şimdi iki boyutlu düzlemdeki her noktanın  $(x = y = 0)$  orijininin değiştirilebileceğine dikkat edelim.

### 3.1.2.12. Keyfi Bir Nokta Etrafında Dönme

Önceden, dönmelerin orijin etrafında meydana geldiğini düşünmüştük. Homojen koordinatlar, orijin dışındaki noktaların etrafındaki dönmeleri yapmak için bir yöntem sağlar. Genel olarak, **keyfi bir nokta etrafında dönme**, önce noktanın orijine ötelenmesi, gerekli dönmenin gerçekleştirilmesi ve ardından sonucun orijinal dönme merkezine geri ötelenmesi ile gerçekleştirilebilir. Böylece,  $[x \ y \ 1]$  konum vektörünün;  $m, n$  noktası etrafında keyfi bir açıyla döndürülmesi

$$[x^* \ y^* \ 1] = [x \ y \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -m & -n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

ile sağlanabilir [6,7]. İki matris çarpımını uygulayarak

$$[x^* \ y^* \ 1] = [x \ y \ 1] \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} -m(\cos \theta - 1) \\ +n \sin \theta \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} -n(\cos \theta - 1) \\ -m \sin \theta \end{array} \right\} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

sonucu elde edilebilir.

### Örnek 3.1.2.12.1. Keyfi Bir Nokta Etrafında Dönme

> # Bir nesnenin merkezinin [4,3] olduğunu ve merkezi etrafında saatin tersi yönde 90° döndürmek istediğini varsayalım.

> **with(linalg):**

> **T1:=matrix([[0,1,0],[-1,0,0],[0,0,1]]);#dönüşüm matrisi**

$$T1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> # Nesne merkezinde değil, orijin etrafında dönmeye neden olur. Gerekli yöntem ilk önce nesneyi ötelemek, böylece istenen dönme merkezinin; orijine öteleme matrisi,

> **T2:=matrix([[1,0,0],[0,1,0],[-4,-3,1**

$$T2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

> #Daha sonra, dönme matrisini uygulayalım ve son olarak, dönme sonuçlarını, ters öteleme matrisi aracılığıyla orijinal merkeze geri öteleyelim. Tüm işlem

> **T3:=matrix([[1,0,0],[0,1,0],[4,3,1]]);#ters öteleme matrisi**

$$T3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

> **A:=matrix([[x,y,1]]);**

$$A := \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix}$$

> #Bir matris işleminde birleştirilebilir.

> **matrix(T2)\*matrix(T1)\*matrix(T3)=multiply(T2,T1,T3);**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

> **T4:=matrix([[0,1,0],[-1,0,0],[7,-1,1]]);**

$$T4 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

> **matrix(A)\*matrix(T4)=multiply(A,T4);**

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 - y & x - 1 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.1.2.13. Keyfi Bir Doğruya Göre Yansıma

Bir nesnenin orijinden geçmeyen **keyfi bir doğruya göre yansıması** keyfi bir nokta etrafında dönme işlemine benzer bir yöntem kullanılarak gerçekleştirilebilir. Bu yansımayı gerçekleştirebilmek için aşağıdaki yöntemler sırasıyla uygulanır [6,9]:

- 1- Doğruyu ve nesneyi, doğrunun orijinden geçeceği şekilde öteleyelim.
- 2- Doğru, koordinat eksenlerinden biriyle çakışana kadar doğruyu ve nesneyi orijin etrafında döndürelim.
- 3- Koordinat eksenini boyunca yansıtalım.
- 4- Orijin etrafında ters dönme uygulayalım.
- 5- Orijinal konumuna geri öteleyelim.

$[T']$  öteleme matrisi,  $[R]$  dönme matrisi,  $[R']$  yansıma matrisi olmak üzere matris notasyonunda ortaya çıkan birleştirilmiş matris

$$[T] = [T'] [R] [R'] [R]^{-1} [T']^{-1} \quad (3.43)$$

matris çarpımları ile elde edilir. Ötelemeler, dönmeler ve yansımalar dönüştürülecek şekle uygulanır. Aşağıda bir örnek verilmiştir.

#### Örnek 3.1.2.13.1. Keyfi Bir Doğruya Göre Yansıma

> # Şekil 3.17.'de gösterilen L doğrusunu ve ABC üçgenini göz önünde bulunduralım. L doğrusunun denklemi

>  $y = 1/2 * (x + 4)$ ;

$$y = \frac{x}{2} + 2$$

> #  $[2 \ 4 \ 1]$ ,  $[4 \ 6 \ 1]$  ve  $[2 \ 6 \ 1]$  konum vektörleri; ABC üçgeninin köşelerini tanımlar.

L doğrusu, y yönünde -2 birim ötelendiğinde orijinden geçer. Sonuç eksenini

$-\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = -26.57^\circ$  ile döndürüldüğünde,  $x$ -ekseni ile çakıştırılabilir. Üçgen  $x$ -eksenine

göre yansıtılır. Üçgenin dönüştürülmüş konum vektörleri daha sonra döndürülür ve orijinal oryantasyonuna geri ötelenir. ABC üçgeninin köşelerinin konum vektörleri:

> **ABC:=matrix([[2,4,1],[4,6,1],[2,6,1]]);**

$$ABC := \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

> **T1:=matrix([[1,0,0],[0,1,0],[0,-2,1]]);#oriijine öteleme matrisi**

$$T1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

> **T2:=matrix([[2/sqrt(5),-1/sqrt(5),0],[1/sqrt(5),2/sqrt(5),0],[0,0,1]]);#sonuç eksenini döndürülmesiyle  $x$ -ekseni ile çakıştırır.**

$$T2 := \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> **T3:=matrix([[1,0,0],[0,-1,0],[0,0,1]]);# $x$ -ekseninde yansıma matrisi**

$$T3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> **T4:=matrix([[2/sqrt(5),1/sqrt(5),0],[-1/sqrt(5),2/sqrt(5),0],[0,0,1]]);#ters dönme matrisi**

$$T4 := \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> **T5:=matrix([[1,0,0],[0,1,0],[0,2,1]]);#geri öteleme matrisi**

$$T5 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

> **with(linalg):**

> **#Birleştirilmiş dönüşüm**

> **matrix(T1)\*matrix(T2)\*matrix(T3)\*matrix(T4)\*matrix(T5)=multiply(T1,T2,T3,T4,T5);**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{8}{5} & \frac{16}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

> #ABC üçgeni için dönüştürülmüş konum vektörleri

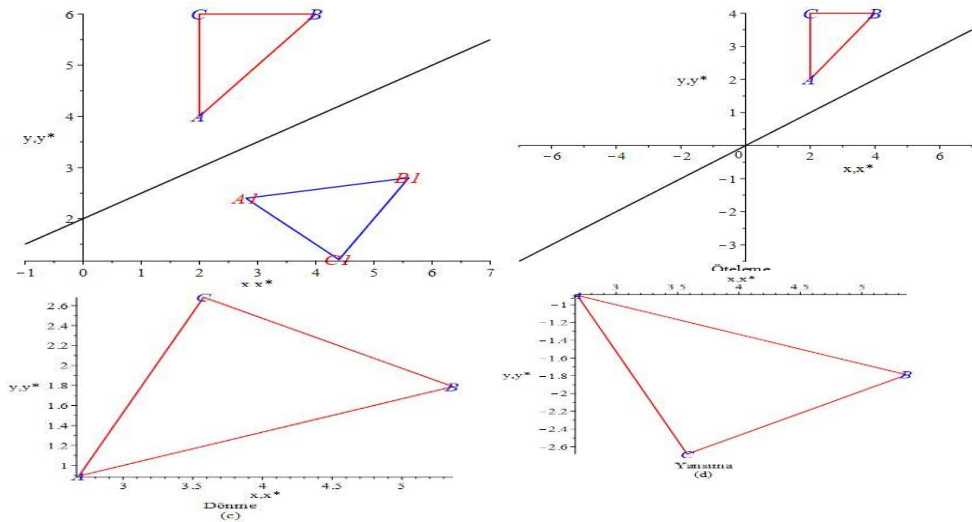
> **T:=matrix([[3/5,4/5,0],[4/5,-3/5,0],[-8/5,16/5,1]]);**

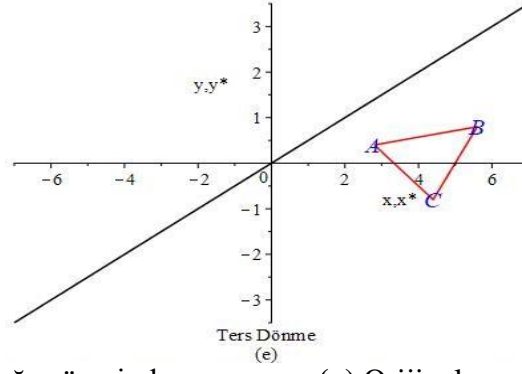
$$T := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{8}{5} & \frac{16}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

> **matrix(ABC)\*matrix(T)=multiply(ABC,T);**

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{8}{5} & \frac{16}{5} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{5} & \frac{12}{5} & 1 \\ \frac{28}{5} & \frac{14}{5} & 1 \\ \frac{22}{5} & \frac{6}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

Şekil 2.9a'da gösterildiği gibidir. Şekil 2.9b ile 2.9e dönüşümdeki çeşitli adımları gösterir.





**Şekil 3.17.** Keyfi bir doğru üzerinden yansıma. **(a)** Orijinal ve nihai konum; **(b)** doğruyu başlangıç noktasına öteleme; **(c)** doğruyu  $x$ -ekseninde döndürme; **(d)**  $x$ -ekseninde yansıma; **(e)** geri dönme; **(a)** geri öteleme

$p = q = 0$  ve  $s = 1$  olduğunda, dönüştürülmüş konum vektörlerinin homojen koordinatı her zaman  $h = 1$  olur. Geometrik olarak bu sonuç, dönüşümü  $h = 1$  fiziksel düzlemiyle sınırlamak olarak yorumlanır.

### 3.1.2.14. Tümünden Ölçekleme

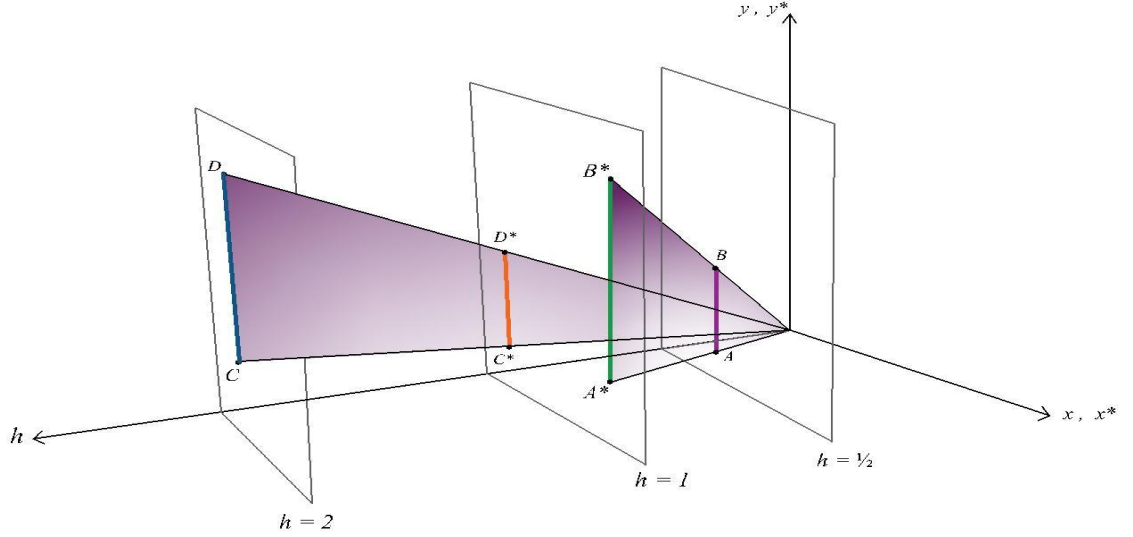
$3 \times 3$ 'lük genel dönüşüm matrisinde açıklanamayan eleman (bkz. denklem 2.54),  $s$  tümünden ölçekleme üretir; yani konum vektörünün tüm bileşenleri eşit olarak ölçeklendirilir. Bunu görmek için

$$[X \ Y \ h] = [x \ y \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} = [x \ y \ s] \quad (3.44)$$

dönüşümü düşünüldüğünde  $X = x, Y = y$  ve  $h = s$  elde edilir. Normalleştirmeden sonra,  $X^* = \frac{x}{s}$  ve  $Y^* = \frac{y}{s}$  olur. Dolayısıyla,  $[x \ y \ 1][T] = \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ s & s & 1 \end{bmatrix}$  dönüşümü, konum vektörünün tek tip ölçeklendirmesidir. Eğer,  $s < 1$  ise o zaman bir genişleme meydana gelir ve eğer,  $s > 1$  ise bir daralma meydana gelir.

Bunun aynı zamanda  $h = 1$  düzleminde bir dönüşüm olduğunu unutmayalım. İşte  $h = s$  sabittir. Bu nedenle,  $h \neq 1$  düzlemi  $h = 1$  düzlemine paraleldir. Bu etkinin geometrik bir yorumu Şekil 2.15'te gösterilmektedir.  $s < 1$  ise  $h = \text{sabit}$  düzlemi,  $h = 1$  ve  $h = 0$  düzlemlerinin arasındadır. Sonuç olarak, dönüştürülen  $AB$  doğrusu tekrar  $h = 1$  düzlemi üzerine yansıtıldığında

$A^*B^*$ 'nın büyüdüğü görülür. Benzer şekilde,  $s > 1$  ise,  $h = \text{sabit}$  düzlemi,  $h$ -ekseni boyunca  $h = 1$ 'in ötesine uzanır. Dönüştürülen  $CD$  doğrusu tekrar  $h = 1$  düzlemine yansıtıldığında  $C^*D^*$  olur ve küçüldüğü görülür [6].



**Şekil 3.18.** Genel ölçeklemenin geometrik bir yorumu

### 3.1.2.15. Sonsuz Noktalar

Homojen koordinatlar, bir koordinat sisteminden bir nokta kümesini bir alternatif koordinat sisteminde karşılık gelen bir kümeye eşlemek için uygun ve etkili bir teknik sağlar. Sık sık, bir koordinat sistemindeki sonsuz bir aralık, alternatif bir koordinat sisteminde sonlu bir aralıkla eşleşir. Eşleştirmeler dikkatlice seçilmedikçe, paralel doğrular paralel doğrularla eşleşmeyebilir. Bununla birlikte, kesişme noktaları kesişme noktalarına eşlenebilir. Bu özellik, sonsuz noktadaki bir noktanın homojen koordinat gösterimini belirlemek için kullanılır [4,5,6].

denklemleri verilen

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x - 3y &= 0 \end{aligned}$$

kesişen doğrular çiftini dikkate alarak başlayalım.  $x = 3/5$ ,  $y = 2/5$  kesişme noktasına sahiptir.

$x + y - 1 = 0$  ve  $2x - 3y = 0$  denklemleri yazılır ve matris formunda verilirse

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

veya

$$[X][M'] = [R]$$

olur.  $[M']$  kare matris olsaydı, kesişme noktası; matrisin tersi ile elde edilirdi. Bu, orijinal denklem sisteminin yeniden yazılmasıyla gerçekleşir. Özellikle,

$$\begin{aligned} x + y - 1 &= 0 \\ 2x - 3y &= 0 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

denklem sisteminin matris formunda yazıldığında

$$[X][M] = [R]$$

ile gösterilir yani

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Bu kare matrisin tersi

$$[M]^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 & 0 \\ 1/5 & -1/5 & 0 \\ 3/5 & 2/5 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

dir. Denklem iki tarafını da  $[M]^{-1}$  ile çarparak ve  $[M][M]^{-1} = [I]$  birim matrisini verdiğini belirterek;

$$[x \ y \ 1] = \frac{1}{5} [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} = [3/5 \ 2/5 \ 1]$$

sonucu elde edilir. Böylece, kesişme noktası tekrar  $x = 3/5$  ve  $y = 2/5$  'dir.

Şimdi tanımlanan iki paralel doğruyu göz önünde bulunduralım.

$$x + y = 1$$

$$x + y = 0$$

denklemleri ile verilen doğrular paralel doğrulardır. Öklid geometrik uzayında paralel doğrular çiftinin kesişme noktası sonsuzda ortaya çıkar. Yukarıdaki yöntem ile bu doğruların kesişme noktasını hesaplamak için

$$[x \ y \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 1]$$

matris formülü elde edilir. Bununla birlikte, matris kare olsa bile, iki satır aynı olduğundan tersi olmadığı için matrisin tekil olduğu söylenir. Tersinir bir matrisi olan başka bir alternatif formül de mümkündür. Bu denklem sistemi

$$x + y - 1 = 0$$

$$x + y = 0$$

$$x = x$$

ile yeniden yazılarak elde edilir. Matris formunda bu

$$[x \ y \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ x]$$

olur. Burada matris tekil değildir; tersi vardır ve

$$[M]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Denklemin iki tarafını da tersiyle çarparsak,

$$[x \ y \ 1] = [0 \ 0 \ x] \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = [x \ -x \ 0] = x[1 \ -1 \ 0]$$

elde edilir. Sonuçtaki homojen koordinatlar  $[1 \ -1 \ 0]$ , iki paralel doğru için “kesişme noktasını”, yani sonsuzluk noktasını temsil eder. Özellikle, iki boyutlu düzlemdeki doğrultuda  $[1 \ -1]$  sonsuzluk noktasını temsil eder. Genel olarak, iki boyutlu homojen vektör  $[a \ b \ 0]$ ,  $ay - bx = 0$  doğrusu üzerindeki sonsuzluk noktasını temsil eder. Bazı örnekler:

$[1 \ 0 \ 0]$  pozitif  $x$ -ekseninde

$[-1 \ 0 \ 0]$  negatif  $x$ -ekseninde

$[0 \ 1 \ 0]$  pozitif  $y$ -ekseninde

$[0 \ -1 \ 0]$  negatif  $y$ -ekseninde

$[1 \ 1 \ 0]$   $y = x$  doğrusu boyunca,  $[1 \ 1]$  yönündedir.

$h = 0$  homojen bileşenli bir vektörün gerçekte sonsuzluktaki bir noktayı temsil etmesi, çizelge 3.1.'de gösterilen sınırlama işlemi ile de gösterilebilir.  $y^* = 3/4 x^*$  doğrusu ve  $[X \ Y \ h] = [4 \ 3 \ 1]$  noktasını düşünelim. Bir konum vektörünün benzersiz bir temsilinin homojen koordinatlarda bulunmadığını hatırlatarak,  $[4 \ 3 \ 1]$  noktası homojen koordinatlarda çizelge 3.1.'de gösterilen tüm şekillerde temsil edilir. Çizelge 3.1.'deki  $h \rightarrow 0$  gibi,  $y^* / x^*$  oranları  $3/4$ ; ana denklem için gereklidir. Dahası,  $y^* = (3/4)x^*$  doğrusuna denk düşen, her bir

ardışık  $(x^*, y^*)$  çiftleri sonsuzluğa yaklaşır. Bu nedenle,  $h \rightarrow 0$  sınırındaki sonsuz nokta,  $[X \ Y \ h] = [4 \ 3 \ 0]$  homojen koordinatlarında verilir [6].

Şekil 3.18.'i hatırlayarak,  $h \rightarrow 0$  sınırlama işleminin geometrik bir yorumu da kolayca açıklanmaktadır.  $h = s(s < 1)$  düzleminde,  $[1 \ 0]$  yönünde bir birim uzunluktaki  $x = 0, y = 0$  doğrusunu düşünelim. Bu doğrunun ters yansıması  $s \rightarrow 0$ ,  $h = 1$  fiziksel düzleminde orijin etrafında çizilerek sınırsız hale gelir. Sonuç olarak, doğrunun bitiş noktası  $x$ -ekseni üzerinde sonsuzluk noktasını temsil etmelidir [6,8].

**Çizelge 3.1.**  $[4 \ 3]$  Noktası için homojen koordinatlar

<b>h</b>	<b>x*</b>	<b>y*</b>	<b>X</b>	<b>Y</b>
<b>1</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>3</b>
<b>1/2</b>	<b>8</b>	<b>6</b>	<b>4</b>	<b>3</b>
<b>1/3</b>	<b>12</b>	<b>9</b>	<b>4</b>	<b>3</b>
.				
.				
.				
<b>1/10</b>	<b>40</b>	<b>30</b>	<b>4</b>	<b>3</b>
.				
.				
.				
<b>1/100</b>	<b>400</b>	<b>300</b>	<b>4</b>	<b>3</b>
.				
.				
.				

## 3.2. Üç Boyutlu Dönüşümler ve MAPLE Uygulamaları

### 3.2.1. Üç Boyutlu Noktaların Temsili

Üç boyutlu bir nesneyi temsil etme veya gösterme yeteneği, bu nesnenin şeklinin anlaşılmasında esastır. Ayrıca bu nesnenin döndürme, öteleme ve yansıma görünümleri de çoğu durumda, şeklinin anlaşılması için esastır. Bu, nispeten karmaşık bir nesne almakla kolayca kanıtlanır. Dolayısıyla, üç boyutlu uzaydaki  $[x \ y \ z]$  noktası, dört boyutlu bir konum vektörü ile temsil edilir [9].  $[T]$  dönüşüm matrisi olmak üzere

$$[x' \ y' \ z' \ h] = [x \ y \ z \ 1][T]$$

olarak yazılır. Yine, homojen koordinatlardan normal koordinatlara dönüşüm;

$$[x^* \ y^* \ z^* \ 1] = \left[ \frac{x'}{h} \ \frac{y'}{h} \ \frac{z'}{h} \ 1 \right] \quad (3.45)$$

dir. Üç boyutlu homojen koordinatlar için genelleştirilmiş  $4 \times 4$ 'lük dönüşüm matrisi

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ g & i & j & r \\ l & m & n & s \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

ile yazılır. Denklem (3.46)'da  $4 \times 4$ 'lük dönüşüm matrisi dört ayrı bölüme ayrılır:

$$\begin{bmatrix} & & & \vdots & 3 \\ & 3 \times 3 & & \vdots & x \\ & & & \vdots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ & 1 \times 3 & & \vdots & 1 \times 1 \end{bmatrix}$$

Sol üst alt  $3 \times 3$ 'lük matris, ölçeklendirme, meyillenme, yansıma ve dönme şeklinde doğrusal bir dönüşüm üretir. Sol alt  $1 \times 3$ 'lük matris öteleme üretir ve karşıt sağ alt  $3 \times 1$ 'lik matris perspektif dönüşüm üretir. Son alt sağ  $1 \times 1$ 'lik matris, genel ölçeklendirme üretir [6].

### 3.2.2. Üç Boyutlu Ölçeklendirme

Genel  $4 \times 4$ 'lük dönüşümün köşegen terimleri **yerel ölçeklendirmeyi** sağlar. Yerel ölçeklendirme etkisini göstermek için

$$\begin{aligned}
 [X][T] &= [x \ y \ z \ 1] \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= [ax \ ey \ jz \ 1] = [x^* \ y^* \ z^* \ 1]
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

dönüşümünü düşünelim [6,9].

#### Örnek 3.2.2.1. Yerel Ölçeklendirme

> #Şekil 3.19a'da gösterilen dikdörtgen paralel yüzünün (RPP) homojen konum vektörleri:

> **X:=matrix([[0,0,1,1],[2,0,1,1],[2,3,1,1],[0,3,1,1],[0,0,0,1],[2,0,0,1],[2,3,0,1],[0,3,0,1]]);**

$$X := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> # Bir birim küp elde etmede RPP'nin yerel ölçeklendirmesi sırasıyla  $x, y, z$  eksenleri boyunca  $1/2, 1/3, 1$  ölçek faktörlerini gerektirir. Yerel ölçekleme dönüşümü;

> **T:=matrix([[1/2,0,0,0],[0,1/3,0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,1]]);#dönüşüm matrisi**

$$T := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> # Oluşan küp, homojen konum vektörlerine sahiptir;

> **with(linalg):**

> **matrix(X)\*matrix(T)=multiply(X,T);**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Homojen  $h$  koordinat faktörünün, dönüştürülmüş konum vektörlerinin her biri için birim oluşturduğuna dikkat edelim. Sonuç, Şekil 3.19b'de gösterilmiştir.

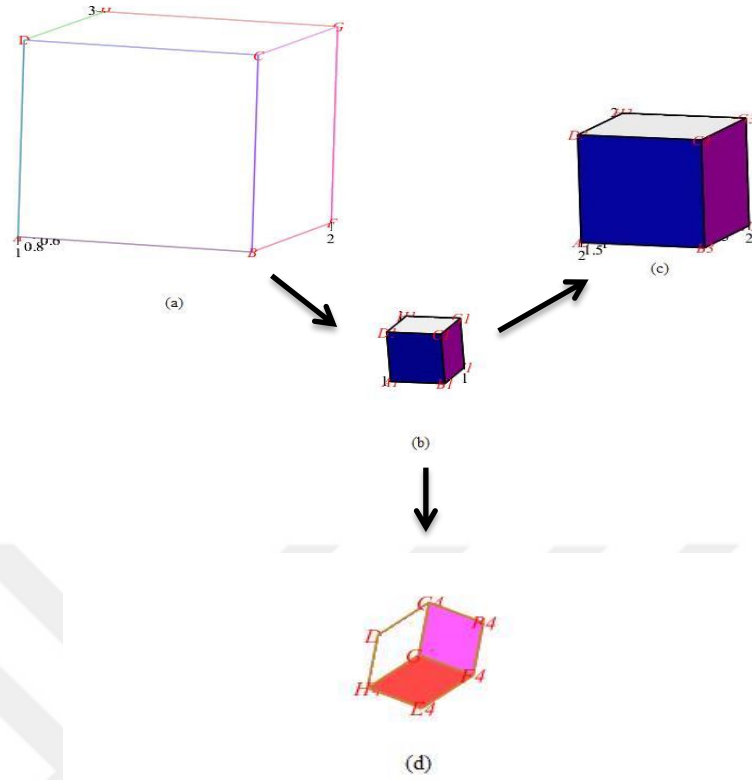
Genel ölçeklendirme, dördüncü köşegen elemanı kullanılarak elde edilir, yani

$$[X][T] = [x \quad y \quad z \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} = [x' \quad y' \quad z' \quad s] \quad (3.48)$$

sıradan veya fiziksel koordinatlar

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & z^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x'}{s} & \frac{y'}{s} & \frac{z'}{s} & 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir [6].



Şekil 3.19. Üç boyutlu ölçeklendirme dönüşümleri

### Örnek 3.2.2.2. Genel Ölçeklendirme

> # Şekil 3.19b'de gösterilen birim küpün iki katına eşit büyüklüğünde ölçeklendirilmesi (boyutun iki katına çıkması) dönüşümünü gerektirir.

> **X:=matrix([[0,0,1,1],[1,0,1,1],[1,1,1,1],[0,1,1,1],[0,0,0,1],[1,0,0,1],[1,1,0,1],[0,1,0,1]]);**

$$X := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> **T:=matrix([[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,0.5]]);#dönüşüm matrisi**

$$T := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

> **with(linalg):**

> **matrix(X)\*matrix(T)=multiply(X,T);**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 1 & 0 & 1 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 0.5 \\ 0 & 1 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 1 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Dönüştürülmüş konum vektörlerinin her biri için homojen koordinat faktörünün  $h=0.5$  olduğuna dikkat edelim. Bu nedenle, sıradan veya fiziksel koordinatları elde etmek için her konum vektörünün  $h$  sabitine bölünmesi gerekir. Sonuç, Şekil 3-19c'de gösterilmiştir.

$$[X^*] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Burada, iki boyutlu genel ölçeklendirme dönüşümünde olduğu gibi, homojen koordinatın birim olmadığına dikkat edelim. Bu, 4-uzayda  $h=1$ ; fiziksel hacmin bir başka hacme dönüşümünü temsil eder. Dönüştürülmüş fiziksel koordinatlar, 4-uzaylı koordinat sisteminin merkezi aracılığıyla  $h=1$  **fiziksel hacmine** geri yansıtılarak elde edilir. Yine, eğer  $s < 1$  ise konum vektörlerinin düzgün bir şekilde **genişlemesi** meydana gelir. Eğer,  $s > 1$  ise konum vektörlerinin düzgün bir şekilde **sıkıştırılması** meydana gelir [6].

Aynı etki, eş değer yerel ölçeklendirme yoluyla da elde edilebilir. Bu durumda dönüşüm matrisi;

$$[T] = \begin{bmatrix} 1/s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Burada homojen koordinat faktörünün birim olduğuna dikkat edelim, yani  $h = 1$ 'dir [4,6].

### 3.2.3. Üç Boyutlu Meyillenme

$4 \times 4$ 'lük genelleştirilmiş dönüşüm matrisinin sol üst  $3 \times 3$  alt matrisindeki köşegen olmayan terimler üç boyutta **meyillenme** üretir yani;

$$\begin{aligned}
 [X][T] &= [x \ y \ z \ 1] \begin{bmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ g & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= [x + yd + gz \quad bx + y + iz \quad cx + fy + z \quad 1]
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

olur [6].

#### Örnek 3.2.3.1. Meyillenme

> #Şekil 3.19b'de gösterilen birim küpü göz önünde bulunduralım. Meyillenme dönüşümünü uygulayalım;

> **X:=matrix([[0,0,1,1],[1,0,1,1],[1,1,1,1],[0,1,1,1],[0,0,0,1],[1,0,0,1],[1,1,0,1],[0,1,0,1]]);**

$$X := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> **#meyillenme dönüşüm matrisi:**

> **T:=matrix([[1,-0.85,0.25,0],[-0.75,1,0.7,0],[0.5,1,1,0],[0,0,0,1]]);**

$$T := \begin{bmatrix} 1 & -0.85 & 0.25 & 0 \\ -0.75 & 1 & 0.7 & 0 \\ 0.5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> **with(linalg):**

> **matrix(X)\*matrix(T)=multiply(X,T);**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.85 & 0.25 & 0 \\ -0.75 & 1 & 0.7 & 0 \\ 0.5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1. & 1. & 1 \\ 1.5 & 0.15 & 1.25 & 1 \\ 0.75 & 1.15 & 1.95 & 1 \\ -0.25 & 2. & 1.7 & 1 \\ 0. & -0. & 0. & 1 \\ 1. & -0.85 & 0.25 & 1 \\ 0.25 & 0.15 & 0.95 & 1 \\ -0.75 & 1. & 0.7 & 1 \end{bmatrix}$$

Sonuç, Şekil 3.19d'de gösterilmektedir. Her üç örnekte de orijinin dönüşümden etkilenmediğine dikkat edelim.

### 3.2.4. Üç Boyutlu Dönme

$x$ -ekseni etrafında dönme için, konum vektörlerinin  $x$  koordinatları değişmezdir.  $4 \times 4$ 'lük homojen koordinat dönüşümü,  $\theta$  açısı kullanılarak yazılır [6].

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Benzer bir şekilde,  $z$ -ekseni etrafında bir  $\Psi$  açısıyla dönme için dönüşüm matrisi [6];

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi & 0 & 0 \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

$y$ -ekseni etrafında bir  $\phi$  açısıyla dönme için, dönüşüm matrisi [6];

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

olur. Denklem (3.52)'de sinüs terimlerinin işaretleri; (3.50) ve (3.51) eşitliklerindeki işaretlerinin tersine çevrilir. Pozitif sağ-el kuralını korumak için bu gereklidir.

Denklem (3.50) ve (3.52)'deki eşitliklerinin incelenmesi; her bir dönüşüm matrisinin determinantının, saf dönme için +1 olması gerektiğini gösterir. Bu sonuçları daha iyi göstermek için bir örnek inceleyelim.

### Örnek 3.2.4.1. Üç Boyutlu Dönme

> #Oluşturulan “L” harfinin gerçek şeklini gösteren yardımcı bir görünüm geliştirelim.

Nesne için konum vektörleri göz önünde bulunduralım.[L] konum vektörlerinin matrisi;

>L:=matrix([[0,0,1,1],[3,0,1,1],[3,2,1,1],[0,2,1,1],[0,0,0,1],[3,0,0,1],[3,2,0,1],[0,2,0,1],[0,1,0,1],[3,1,0,1],[3,1,-2,1],[0,1,-2,1],[3,0,-2,1],[0,0,-2,1]]);

$$L := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

> # y-eksenindeki theta=-90°'lik dönme uygulayalım:

> T1:=matrix([[0,0,1,0],[0,1,0,0],[-1,0,0,0],[0,0,0,1]]);

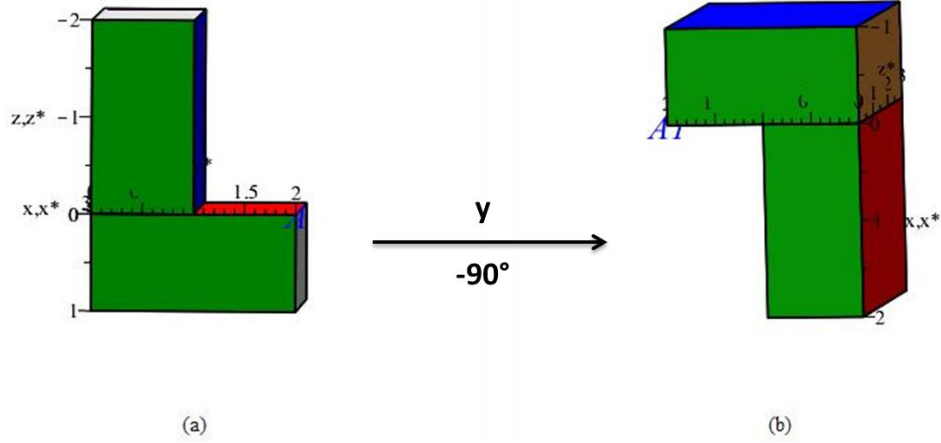
$$T1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> with(linalg):

> matrix(L)\*matrix(T1)=multiply(L,T1);

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu durumda  $y$  bileşenlerinin  $[L]$  ve  $[L^*]$  aynı olduğuna dikkat edelim. Sonuç, şekilde gösterilmiştir.



Şekil 3.20. Üç boyutlu dönme (L harfi için)

#### Örnek 3.2.4.2. Dönme

> #Şekil 3.21a'da gösterilen dikdörtgen paralel yüzlüğü göz önünde bulunduralım.  $[X]$  konum vektörlerinin matrisi;

>  $X := \text{matrix}([[0,0,1,1],[3,0,1,1],[3,2,1,1],[0,2,1,1],[0,0,0,1],[3,0,0,1],[3,2,0,1],[0,2,0,1]]);$

$$X := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> # Burada,  $[X]$  konum matrisinde etiketli  $A$  satırı, Şekil 3.21'deki  $A$  noktasına karşılık gelir. Denklem (3.50)'de  $x$ -eksenindeki  $\theta = -90^\circ$ 'lik dönmedir.

> **T1:=matrix([[1,0,0,0],[0,0,-1,0],[0,1,0,0],[0,0,0,1]]);**

$$T1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> **with(linalg):**

>**matrix(X)\*matrix(T1)=multiply(X,T1);#Dönüşümün uygulanması yeni konum vektörlerini verir;**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$x$  bileşenlerinin gerektiği gibi  $[X]$  ve  $[X^*]$  matrislerinde aynı olduğuna dikkat edelim. Sonuç, Şekil 3.20b'de gösterilmektedir.

> #  $y$ -eksenindeki  $\phi = 90^\circ$ 'lik dönme uygulayalım:

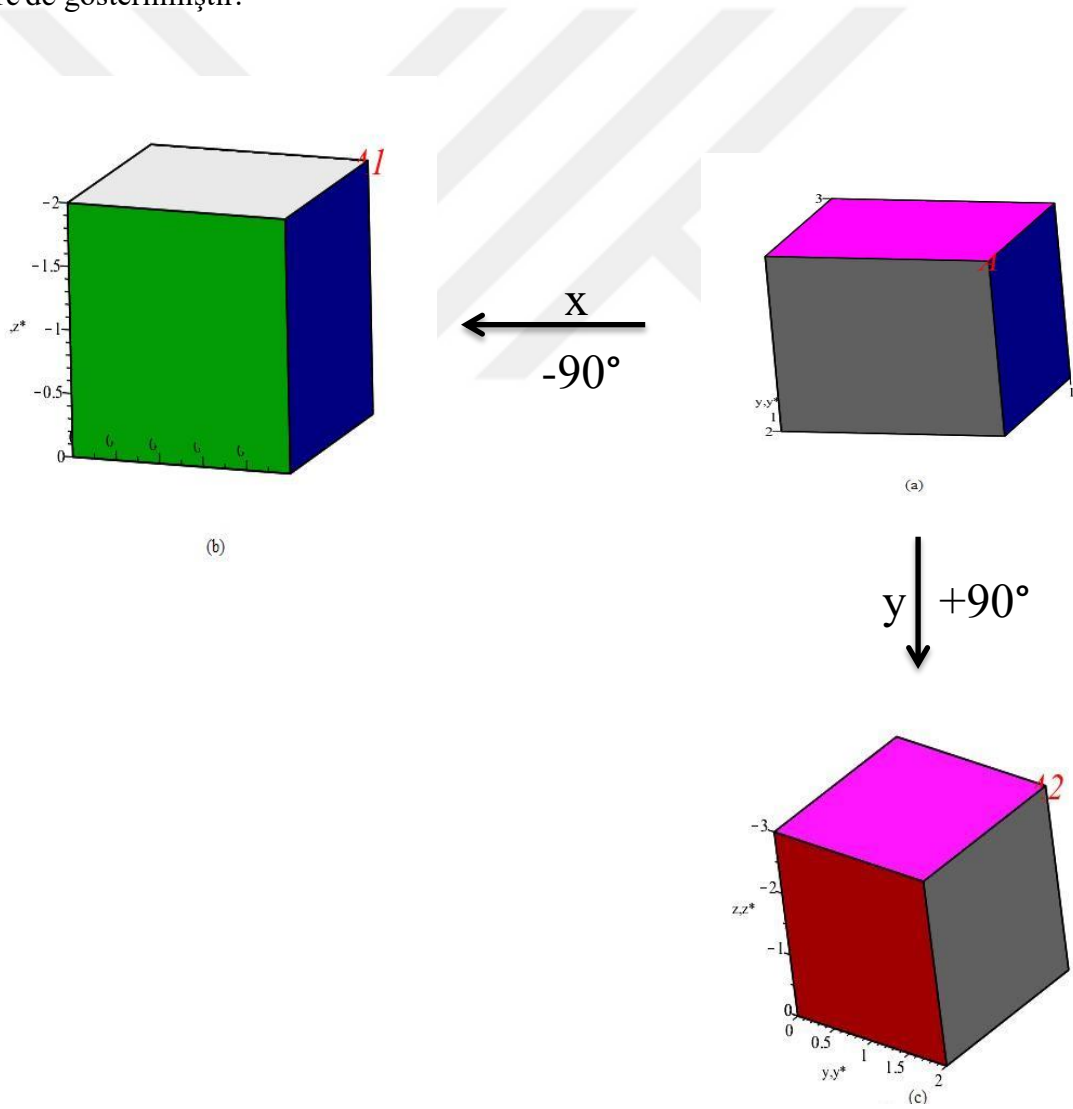
> **T2:=matrix([[0,0,-1,0],[0,1,0,0],[1,0,0,0],[0,0,0,1]]);**

$$T2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> **matrix(X)\*matrix(T2)=multiply(X,T2);** #yine, dönüşümü orijinal bloğa uygulamak, yeni konum vektörlerini verir, yani;

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Bu durumda  $y$  bileşenlerinin  $[X]$  ve  $[X^{*f}]$  aynı olduğuna dikkat edelim. Sonuç, Şekil 3.21c'de gösterilmiştir.



Şekil 3.21. Üç boyutlu dönme (dikdörtgen paralel yüzlü)

Şimdi önce  $x$ -ekseni etrafında eş bir dönme yaptıktan sonra  $y$ -ekseni etrafında bir dönme dönüşümü uygulandığında birleştirilmiş matris

$$\begin{aligned}
 [T] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ \sin^2 \theta & \cos \theta & \cos \theta \sin \theta & 0 \\ \cos \theta \sin \theta & -\sin \theta & \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

ile oluşturulur. Öte yandan, ters işlem yapıldığında, yani,  $y$ -ekseni etrafında bir dönme, ardından  $x$ -ekseni etrafında eş bir dönme izlerse

$$\begin{aligned}
 [T] &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

olur. Burada  $\theta = \phi$ 'dir [6,7]. Eşitliklerin sağ taraflarının karşılaştırılması, denklem (3.53) ve (3.54)'ün aynı olmadığını gösterir. Üç boyutta birden fazla dönme yapıldığında dönmeler değişmezdir. Şekil 3.22a'daki nesnenin dönüşümünün sonucunu içeren; denklem (3.53) iki tane  $90^\circ$ 'lik dönme matrisinin çarpımını verir, Şekiller 3.22c ve 3.22d 'de kesikli gösterilmiştir. denklem (3.54)'de verilen ters dönme; Şekiller 3.22b ve 3.22d'de gösterilmiştir. Dönme sırası değiştirilerek; farklı sonuçların alınmıştır. Sayısal bir örnek ile bu düşüncelyi daha da açıklayalım [6].

### Örnek 3.2.4.3. Birleşik Dönmeler

> #Şekil 3.22a'daki nesne konum vektörleri;

> with(linalg):

> X:=matrix([[0,0,1,1],[2,0,1,1],[2,3,1,1],[0,2,1,1],[0,0,0,1],[2,0,0,1],[2,3,0,1],[0,2,0,1]]);

$$X := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> # x-ekseni etrafında 90°'lik dönme, ardından y-ekseni etrafında 90°'lik dönme için birleştirilmiş matris;

> T:=matrix([[0,0,-1,0],[1,0,0,0],[0,-1,0,0],[0,0,0,1]]);

$$T := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> #Dönüştürülmüş konum vektörleri:

> matrix(X)\*matrix(T)=multiply(X,T);

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> # Dönüştürülen nesne Şekil 3-22d'de kesikli olarak gösterilmiştir. y-ekseni etrafında 90°'lik dönme ardından x-ekseni etrafında 90°'lik dönme için birleştirilmiş matris:

> T1:=matrix([[0,1,0,0],[0,0,1,0],[1,0,0,0],[0,0,0,1]]);

$$T1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

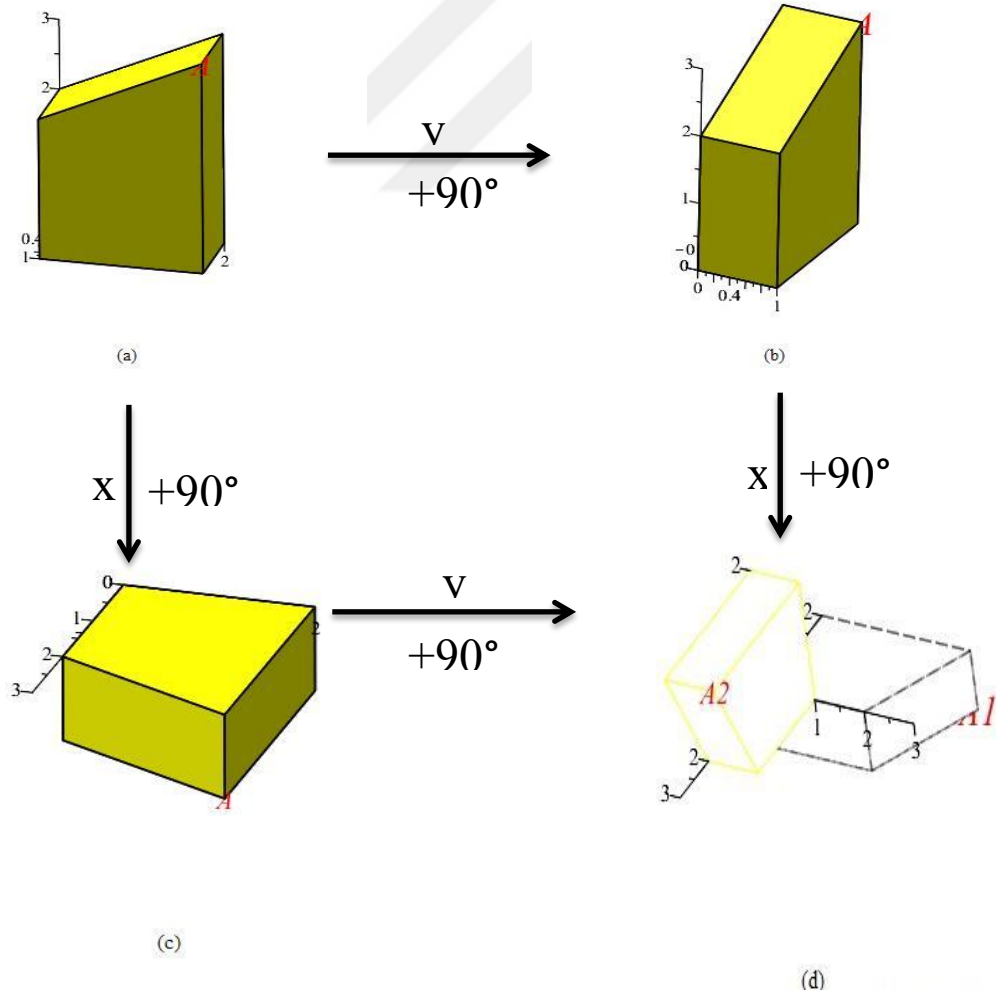
> #dönüştürülmüş konum vektörleri:

>  $\text{matrix}(X)*\text{matrix}(T1)=\text{multiply}(X,T1);$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu örnekte dönüştürülen nesne Şekil 3.22'de kesintisiz çizgilerle gösterilmiştir.

Aynı zamanda iki sayısal sonucun karşılaştırılması, dönüştürülen nesnelerin yöneliminin oldukça farklı olduğunu açıkça göstermektedir. Bu nedenle, **matris çarpımının sırası** önemlidir.



Şekil 3.22. Değişmesiz üç boyutlu dönmeler

### 3.2.5. Üç Boyutlu Yansıma

Üç boyutta yansımalar bir düzleme göre alınır. Saf yansıma için yansıma matrisinin determinanı  $-1$  olmalıdır [2].

#### 3.2.5.1. Üç Boyutlu Öklid Uzayında Düzleme Göre Yansıma

**Teorem 3.2.5.1.1.**  $R^3$  uzayında bir  $u = (x, y, z)$  vektörünün,  $Ax + By + Cz = 0$  düzlemine göre yansımasını (simetriğini) veren lineer dönüşümün matrisi

$$T = \frac{1}{A^2 + B^2 + C^2} \begin{bmatrix} -A^2 + B^2 + C^2 & -2AB & -2AC \\ -2AB & A^2 - B^2 + C^2 & -2BC \\ -2AC & -2BC & A^2 + B^2 - C^2 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

biçiminde tanımlanır [12].

1.  $x = 0$  düzlemine göre yansıma için lineer dönüşüm matrisinde  $A = 1, B = 0, C = 0$  yerine yazılırsa,  $yz$  düzleminde yansıması için,

$$T = \frac{1}{1^2 + 0^2 + 0^2} \begin{bmatrix} -1^2 + 0^2 + 0^2 & -2 \cdot 1 \cdot 0 & -2 \cdot 1 \cdot 0 \\ -2 \cdot 1 \cdot 0 & 1^2 - 0^2 + 0^2 & -2 \cdot 0 \cdot 0 \\ -2 \cdot 1 \cdot 0 & -2 \cdot 0 \cdot 0 & 1^2 + 0^2 - 0^2 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$
$$= \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir.

2.  $y = 0$  düzlemine göre yansıma için lineer dönüşüm matrisinde;  $A = 0, B = 1, C = 0$  yerine yazılırsa,  $xz$  düzleminde yansıması için,

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{0^2 + 1^2 + 0^2} \begin{bmatrix} -0^2 + 1^2 + 0^2 & -2.0.1 & -2.0.0 \\ -2.0.1 & 0^2 - 1^2 + 0^2 & -2.1.0 \\ -2.0.0 & -2.1.0 & 0^2 + 1^2 - 0^2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.57}$$

matrisi elde edilir.

3.  $z = 0$  düzlemine göre yansıma için lineer dönüşüm matrisinde;  
 $A = 0, B = 0, C = 1$  yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{0^2 + 0^2 + 1^2} \begin{bmatrix} -0^2 + 0^2 + 1^2 & -2.0.0 & -2.0.1 \\ -2.0.0 & 0^2 - 0^2 + 1^2 & -2.0.1 \\ -2.0.1 & -2.0.1 & 0^2 + 0^2 - 1^2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.58}$$

matrisi elde edilir.  $xy$  düzlemi boyunca bir yansımada, yalnızca nesnenin konum vektörlerinin  $z$  koordinat değerlerinin işareti tersine çevrilir.

### Örnek 3.2.5.1.1. Düzleme Göre Yansıma

$R^3$  uzayında verilen  $K(6,4,1)$  noktasının,  $2x + y + z = 0$  düzlemine göre simetriği olan noktayı bulunuz.

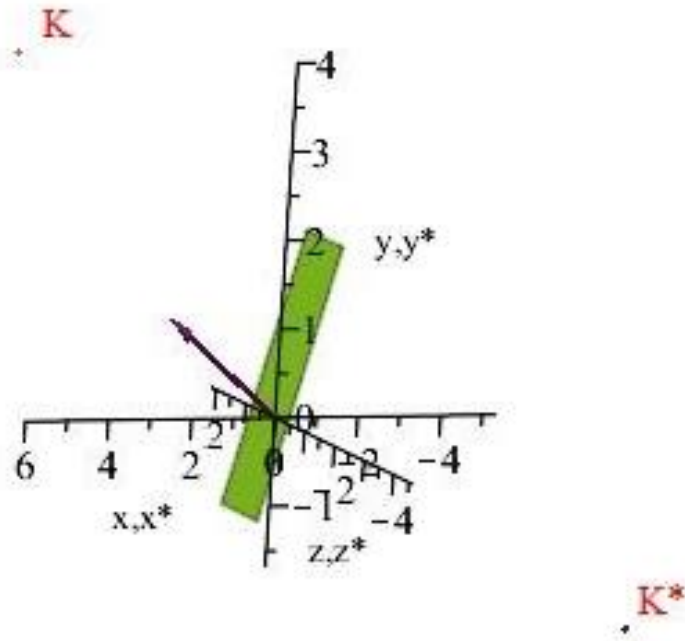
**Çözüm:**  $2x + y + z = 0$  düzlemine göre simetri dönüşümü, yukarıdaki yansıma dönüşümü yardımıyla

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2^2 + 1^2 + 1^2} \begin{bmatrix} -2^2 + 1^2 + 1^2 & -2.2.1 & -2.2.1 \\ -2.2.1 & 2^2 - 1^2 + 1^2 & -2.1.1 \\ -2.2.1 & -2.1.1 & 2^2 + 1^2 - 1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buna göre,

$$T \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & -4 & -4 \\ -4 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{16}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{14}{3} \end{bmatrix}$$

elde edilir.



Şekil 3.23. Düzleme göre yansıma

### Örnek 3.2.5.1.2. Yansıma

> #Konum vektörleri tarafından tanımlanan  $ABCDEFGH$  bloğu göz önünde bulunduralım.

> with(linalg):

> X:=matrix([[1,0,-1,1],[2,0,-1,1],[2,1,-1,1],[1,1,-1,1],[1,0,-2,1],[2,0,-2,1],[2,1,-2,1],[1,1,-2,1]]);

$$X := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

>  $xy$  düzlemi boyunca yansıma için dönüşüm matrisi denklem (3.58)'dedir. Yansımadan sonra dönüştürülmüş konum vektörleri

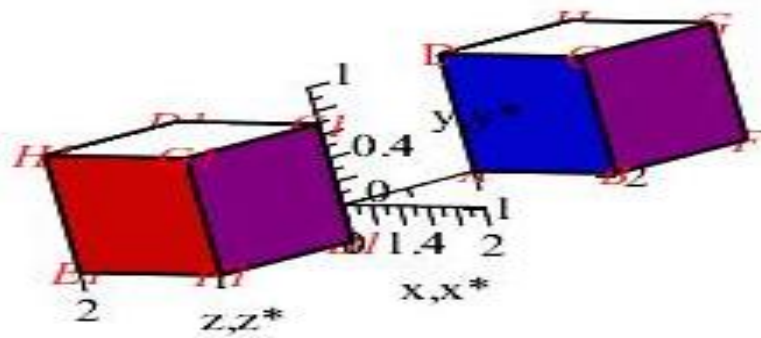
>  $T := \text{matrix}([[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,-1,0],[0,0,0,1]]);$

$$T := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

>  $\text{matrix}(X)*\text{matrix}(T)=\text{multiply}(X,T);$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Sonuç  $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ , Şekil 3.24.'te gösterilmiştir.



Şekil 3.24.  $xy$ -düzlemi üzerinde üç boyutlu yansıma

### Örnek 3.2.5.1.3. Üç Boyutlu Yansıma

> #Konum vektörleri tarafından tanımlanan "L" harfini göz önünde bulunduralım.

> with(linalg):

> L:=matrix([[0,0,1,1],[3,0,1,1],[3,2,1,1],[0,2,1,1],[0,0,0,1],[3,0,0,1],[3,2,0,1],[0,2,0,1],[0,1,0,1],[3,1,0,1],[3,1,-2,1],[0,1,-2,1],[3,0,-2,1],[0,0,-2,1]]);

$$L := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

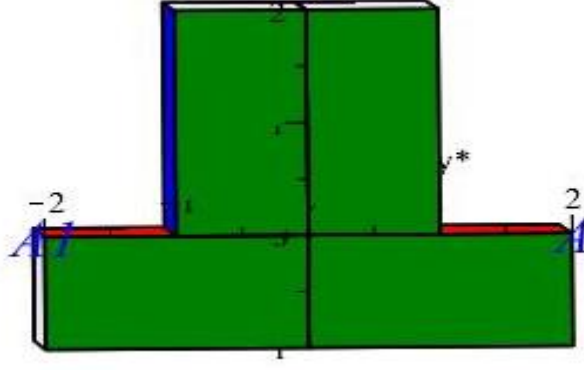
> T:=matrix([[1,0,0,0],[0,-1,0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,1]]);# xz yansıma matrisi

$$T := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> matrix(L)\*matrix(T)=multiply(L,T);

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Sonuç şekilde gösterilmiştir.



Şekil 3.25. Üç boyutlu yansıma

### 3.2.6. Üç Boyutlu Öteleme

Üç boyutlu öteleme matrisi

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & m & n & 1 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

ile tanımlanır. Nesnenin koordinatlarına uygulandığında

$$[x' \ y' \ z' \ h] = [x \ y \ z \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & m & n & 1 \end{bmatrix}$$

ötelenmiş noktanın koordinatları elde edilir [6]. Matris çarpımı yapıldığında

$$[x' \ y' \ z' \ h] = [(x+l) \ (y+m) \ (z+n) \ 1] \quad (3.60)$$

eşitliği bulunur. Dönüştürülen fiziksel koordinatlar,

$$\begin{aligned}x' &= x + l \\y' &= y + m \\z' &= z + n\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

### Örnek 3.2.6.1. Üç Boyutlu Öteleme

> #Oluşturulan “L” harfinin gerçek şeklini gösteren yardımcı bir görünüm geliştirelim.

Nesne için konum vektörleri göz önünde bulunduralım.[L] konum vektörlerinin matrisi;

>L:=matrix([[0,0,1,1],[3,0,1,1],[3,2,1,1],[0,2,1,1],[0,0,0,1],[3,0,0,1],[3,2,0,1],[0,2,0,1],[0,1,0,1],[3,1,0,1],[3,1,-2,1],[0,1,-2,1],[3,0,-2,1],[0,0,-2,1]]);

$$L := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

> # öteleme dönüşümü uygulayalım:

> T:=matrix([[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[2,0,0,1]]);

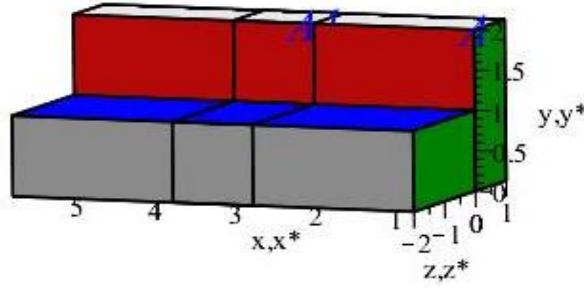
$$T := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> Ötelenmiş homojen koordinatlar yazılı olarak elde edilir.

> with(linalg):

> matrix(L)\*matrix(T)=multiply(L,T);

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$



Şekil 3.26. Üç boyutlu öteleme

### 3.2.7. Çoklu Dönüşümler

Ardışık dönüşümler, aynı sonucu veren tek bir 4x4'lük dönüşümde birleştirilebilir. Matematiksel olarak

$$[X][T] = [X][T_1][T_2][T_3][T_4] \cdots$$

burada birleştirilmiş dönüşüm matrisi

$$[T] = [T_1][T_2][T_3][T_4] \cdots$$

denklemleri ile gösterilir. Burada  $[T_i]$  matrisi ölçekleme, meyillenme, döndürme, yansıma, öteleme, perspektif ve izdüşüm matrislerinin herhangi bir birleşimidir. Sırasıyla  $x$ -ve  $y$ - eksenlerindeki  $\theta, \phi$  dönme açıları ve  $l, m, n$  sırasıyla  $x, y, z$  yönlerdeki öteleme faktörleri olmak üzere (3.50), (3.52) ve (3.59) eşitliklerinin kullanılmasıyla birleştirilmiş dönüşüm matrisi

$$\begin{aligned}
[T] &= [Tr][R_x][R_y] \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & m & n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & m & n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi \sin \theta & \cos \theta & \cos \phi \sin \theta & 0 \\ \sin \phi \cos \theta & -\sin \theta & \cos \phi \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi \sin \theta & \cos \theta & \cos \phi \sin \theta & 0 \\ \sin \phi \cos \theta & -\sin \theta & \cos \phi \cos \theta & 0 \\ l \cos \phi & m \cos \theta & -l \sin \phi & 1 \\ +m \sin \phi \sin \theta & -n \sin \theta & +m \cos \phi \sin \theta & \\ +n \sin \phi \cos \theta & & +n \cos \phi \cos \theta & \end{bmatrix} \tag{3.61}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Genel bir konum vektörü için dönüşüm uygulanırsa

$$\begin{aligned}
[X][T] &= \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi \sin \theta & \cos \theta & \cos \phi \sin \theta & 0 \\ \sin \phi \cos \theta & -\sin \theta & \cos \phi \cos \theta & 0 \\ l \cos \phi & m \cos \theta & -l \sin \phi & 1 \\ +m \sin \phi \sin \theta & -n \sin \theta & +m \cos \phi \sin \theta & \\ +n \sin \phi \cos \theta & & +n \cos \phi \cos \theta & \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (x+l) \cos \phi & (y+m) \cos \theta & -(x+l) \sin \phi & 1 \\ +(y+m) \sin \phi \sin \theta & -(z+n) \sin \theta & +(y+m) \cos \phi \sin \theta & \\ +(z+n) \sin \phi \cos \theta & & +(z+n) \cos \phi \cos \theta & \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir [6].

Aşağıdaki örnek bu dönüşümü göstermektedir.

### Örnek 3.2.7.1. Çoklu Dönüşümler

Konum vektörü  $[3 \ 2 \ 1 \ 1]$  olan bir vektörü sırasıyla  $x, y, z$  yönlerindeki  $-1, -1, -1$  ötelemenin etkisini, ardından art arda  $x$ -ekseni etrafında bir  $+30^\circ$ 'lik dönme ve  $y$ -ekseni etrafında bir  $+45^\circ$ 'lik dönme dönüşümlerini homojen koordinat ile düşünelim. Dönüştürülmüş konum vektörünün  $\theta = +30^\circ, \phi = +45^\circ$  dönme açıları ve  $l = -1, m = -1, n = -1$  öteleme faktörleri için değeri

$$[X][T] = [3 \ 2 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 0.707 & 0 & -0.707 & 0 \\ 0.354 & 0.866 & 0.354 & 0 \\ 0.612 & -0.5 & 0.612 & 0 \\ -1.673 & -0.366 & -0.259 & 1 \end{bmatrix} = [1.768 \ 0.866 \ -1.061 \ 1]$$

olarak hesaplanır. Birleştirilmiş matrisin ayrı ayrı uygulanan matrislerle aynı sonucu verdiğini doğrulamak için sırasıyla matris çarpımları uygulandığında

$$\begin{aligned} [X'] &= [X][T_r] \\ &= [3 \ 2 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= [2 \ 1 \ 0 \ 1] \\ [X''] &= [X'][R_x] = [2 \ 1 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.866 & 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= [2 \ 0.866 \ 0.5 \ 1] \\ [X'''] &= [X''][R_y] = [2 \ 0.866 \ 0.5 \ 1] \begin{bmatrix} 0.707 & 0 & -0.707 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.707 & 0 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [X'''] &= [0.768 \ 0.866 \ -1.061 \ 1] \end{aligned}$$

sonuçları elde edilir. Bu sonuçlardan önceki sonucun doğrulandığı görülür.

### 3.2.8. Bir Eksene Paralel Koordinat Eksenleri ile İlgili Dönmeler

Denklem (3.50), (3.51) ve (3.52)'de verilen dönüşümler  $x$ ,  $y$  ve  $z$  koordinat eksenlerinde dönme dönüşümünü gerçekleştirir. Genellikle bir nesneyi, bunlardan başka bir eksen etrafında döndürmek gerekir. Burada,  $x$ ,  $y$  veya  $z$  koordinat eksenlerinden birine paralel olan bir eksenin özel durumu dikkate alınır. Şekil 3.27,  $x'y'z'$  sabit küresel eksen sistemine paralel  $xyz$  yerel eksen sistemine sahip cisim göstermektedir. Cismin  $x'$ ,  $y'$  veya  $z'$  yerel eksenlerden herhangi biri etrafında dönmesi, aşağıdaki prosedür kullanılarak gerçekleştirilir [6,9]:

- 1- Yerel eksen, koordinat ekseni ile aynı yönde çakışana kadar cisim ötelenir.
- 2- Belirtilen eksen etrafında döndürülür.
- 3- Dönüştürülen cisim eski konumuna getirilir.

$[X^*]$  dönüştürülmüş cisim temsil eder

$[X]$  dönüştürülmemiş cisim

$[Tr]$  öteleme matrisi

$[R_x]$  uygun dönme matrisi

$[Tr]^{-1}$  öteleme matrisinin tersi

ile verilen dönüşümlerle oluşturulan birleştirilmiş dönüşüm matrisi matematiksel olarak

$$[X^*] = [X][Tr][R_x][Tr]^{-1}$$

olarak yazılır.

#### Örnek 3.2.8.1. Tekli Bağlı Dönme

> #Konum vektörleri tarafından tanımlanan bloğu göz önünde bulunduralım.

> with(linalg):

> X:=matrix([[1,1,2],[2,1,2],[2,2,2],[1,2,2],[1,1,1],[2,1,1],[2,2,1],[1,2,1]]);

$$X := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

> küresel  $xyz$ -eksen sistemine göre; bloğun merkezinden geçen bloğu  $x'$ -ekseni etrafında  $\theta = +30^\circ$ 'lik döndürelim. Yerel eksen sisteminin orijininin bloğun merkezi olduğu kabul edilir. Bloğun merkezi  $[x_c \ y_c \ z_c \ 1] = [3/2 \ 3/2 \ 3/2 \ 1]$ 'dir. Dönme uygulanırsa

$[X^*] = [X][Tr][R_x][Tr]^{-1}$  olduğundan

> Bloğun merkezi:

>  $M := \text{matrix}([[3/2, 3/2, 3/2, 1]]);$

$$M := \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

>  $x := 3/2$

$$x := \frac{3}{2}$$

>  $y := 3/2$

$$y := \frac{3}{2}$$

>  $z := 3/2$

$$z := \frac{3}{2}$$

>  $T := \text{matrix}([[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[0,-y,-z,1]]);$  #öteleme matrisi

$$T := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

>  $R := \text{matrix}([[1,0,0,0],[0,\text{evalf}(\cos(\text{Pi}/6),4),\text{evalf}(\sin(\text{Pi}/6),1),0],[0,\text{evalf}(-\sin(\text{Pi}/6),1),\text{evalf}(\cos(\text{Pi}/6),4),0],[0,0,0,1]]);$

$$R := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8660 & 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.8660 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> **T1:=matrix([[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[0,y,z,1]]); #x-eksenine öteleme matrisi**

$$T1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

> İlk matris  $[Tr]$ ;  $x'$ -ekseni,  $x$ -ekseni ile çakışana kadar bloğu  $x=0$  düzlemine paralel olarak öteler. İkinci matris  $[R_x]$ ;  $x$ -ekseni etrafında gereken dönmeyi gerçekleştirir ve üçüncü matris  $[Tr]^{-1}$ ;  $x'$ -eksenine öteler ve böylece döndürülen bloğu ilk konumuna geri döndürür. Bu üç matrisi birleştirirsek;

> **matrix(T)\*matrix(R)\*matrix(T1)=multiply(T,R,T1);**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8660 & 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.8660 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0.8660 & 0.5 & 0. \\ 0. & -0.5 & 0.8660 & 0. \\ 0. & 0.9510000000 & -0.5490000000 & 1. \end{bmatrix}$$

> **TD:=matrix([[1,0,0,0],[0,0.866,0.5,0],[0,-0.5,0.866,0],[0,0.951,-0.549,1]]);**

$$TD := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.866 & 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0.951 & -0.549 & 1 \end{bmatrix}$$

> **matrix(X)\*matrix(TD)=multiply(X,TD);**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.866 & 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0.951 & -0.549 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.817 & 1.683 & 1 \\ 2 & 0.817 & 1.683 & 1 \\ 2 & 1.683 & 2.183 & 1 \\ 1 & 1.683 & 2.183 & 1 \\ 1 & 1.317 & 0.817 & 1 \\ 2 & 1.317 & 0.817 & 1 \\ 2 & 2.183 & 1.317 & 1 \\ 1 & 2.183 & 1.317 & 1 \end{bmatrix}$$

> **#Birleştirilmiş matris**

> **restart:**

> **R1:=matrix([[1,0,0,0],[0,cos(theta),sin(theta),0],[0,-sin(theta),cos(theta),0],[0,0,0,1]]);**

$$R1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> **T2:=matrix([[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[0,-y,-z,1]]);**

$$T2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -y & -z & 1 \end{bmatrix}$$

> **T3:=matrix([[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[0,y,z,1]]);**

$$T3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & z & 1 \end{bmatrix}$$

> **with(linalg):**

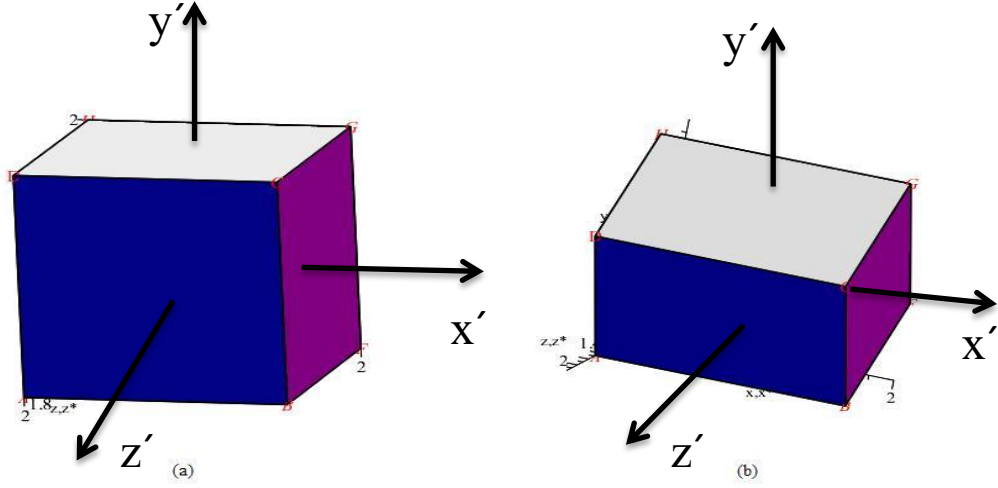
> **matrix(T2)\*matrix(R1)\*matrix(T3)=multiply(T2,R1,T3);**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -y & -z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & z & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & -y\cos(\theta) + z\sin(\theta) + y & -y\sin(\theta) - z\cos(\theta) + z & 1 \end{bmatrix}$$

Önceki örnekte sadece koordinat eksenlerinden birine paralel tek bir eksen etrafında dönme gerekiyordu. Bu nedenle, dönme ekseninin sadece karşılık gelen koordinat eksenine denk gelmesi gerekiyordu. Küresel eksen sistemine paralel bir yerel eksen sisteminde birden fazla dönme gerekiyorsa, yerel eksen sisteminin orijini küresel eksen sistemininkiyle çakışmalıdır. Özellikle, dönmeler aşağıdaki prosedürle gerçekleştirilir [6]:

- 1-Küresel koordinat sistemi ile çakışması için yerel eksen sisteminin orijini ötelenir.
- 2-Gerekli dönmeler gerçekleştirilir.
- 3-Yerel eksen sistemi tekrar orijinal konumuna ötelenir.

Aşağıdaki örnek bu prosedürü göstermektedir.



Şekil 3.27. Koordinat eksenlerinden birine paralel bir eksen etrafında dönme

### Örnek 3.2.8.2. Çoklu Bağlı Dönmeler

Şekil 3.27a'da gösterilen üç boyutlu blok göz önünde bulundursun. Bloğu  $y'$ -ekseni etrafında  $\phi = -45^\circ$ 'lik döndürmek, ardından  $x'$ -ekseni etrafında  $\theta = +30^\circ$ 'lik döndürmek için;  $x'y'z'$ -ekseni sisteminin orijini ile  $xyz$ -ekseni sisteminin orijini çakışmalıdır, yapılan dönmeler ve daha sonra geri öteleme sonucu orijinal konum elde edilmelidir. Burada birleştirilmiş dönüşüm

$$[X'] = [X][T] = [X][Tr][R_y][R_x][Tr]^{-1}$$

olur. Özellikle,

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_c & -y_c & -z_c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_c & y_c & z_c & 1 \end{bmatrix}$$

$\phi$  ve  $\theta$  açıları sırasıyla  $y'$ - ve  $x'$ -eksenleri etrafındaki dönme açısını temsil eder [6].

Bu matrisleri birleştirecek,

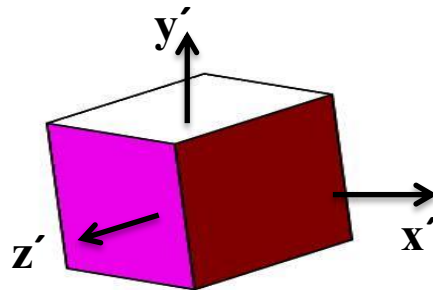
$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \cos \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \phi & -\cos \phi \sin \theta & \cos \phi \cos \theta & 0 \\ x_c(1 - \cos \phi) & -x_c \sin \phi \sin \theta & x_c \sin \phi \cos \theta & 1 \\ -z_c \sin \phi & +y_c(1 - \cos \theta) & -y_c \sin \theta & \\ & +z_c \cos \phi \sin \theta & +z_c(1 - \cos \phi \cos \theta) & \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

elde edilir. Daha sonra dönüştürülmüş konum vektörleri

$$[X'] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.707 & -0.354 & 0.612 & 0 \\ 0 & 0.866 & 0.5 & 0 \\ -0.707 & -0.354 & 0.612 & 0 \\ 0 & 1.262 & -1.087 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[X'] = \begin{bmatrix} 0.793 & 1.067 & 1.25 & 1 \\ 1.5 & 0.713 & 1.862 & 1 \\ 1.5 & 1.579 & 2.362 & 1 \\ 0.793 & 1.933 & 1.75 & 1 \\ 1.5 & 1.421 & 0.638 & 1 \\ 2.207 & 1.067 & 1.25 & 1 \\ 2.207 & 1.933 & 1.75 & 1 \\ 1.5 & 2.287 & 1.138 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Sonuç, Şekil 3.28.'de gösterilmektedir.



Şekil 3.28. Yerel eksen sistemi etrafında çoklu dönmeler

### 3.2.9. Uzaydaki Keyfi Bir Eksen Etrafında Dönme

Uzayda rastgele bir eksen etrafındaki genel dönme durumu robotik, animasyon ve simülasyon alanlarda oldukça yaygın bir biçimde kullanılır. Uzayda rastgele bir eksen etrafında dönme, bir koordinat eksenini etrafında ötelemeler ve basit dönmeler kullanılarak bir prosedürle gerçekleştirilir. Bir koordinat eksenini etrafında dönme tekniği bilindiği için, temel prosedürel fikir, yani isteğe bağlı dönme eksenini, koordinat eksenlerinden biri ile çakışır [2,3].

$(x_0, y_0, z_0)$  noktasının,  $(c_x, c_y, c_z)$  doğrultman kosinüsleri ile uzayda keyfi bir eksen etrafında döndürüldüğünü varsayalım. Bu eksen etrafında bir  $\delta$  açısı kadar dönme, aşağıdaki algoritma kullanılarak gerçekleştirilir:

- 1- Öteleme sonucunda  $(x_0, y_0, z_0)$  noktası koordinat sisteminin orijininde olsun.
- 2- Dönme eksenini,  $z$ -ekseni ile çakışır yapmak için uygun dönmeleri gerçekleştirelim.
- 3-  $z$ -ekseni etrafında  $\delta$  açısı kadar döndürelim.
- 4- Birleştirilmiş dönme dönüşümünün tersini yapalım.
- 5- Ötelemenin tersini yapalım.

Genel olarak, başlangıç noktasından geçen ve koordinat eksenlerinden biriyle çakışan rastgele bir eksen oluşturmak, diğer iki koordinat eksenini etrafında art arda iki dönme gerektirir. İsteğe bağlı dönme eksenini  $z$ -ekseni ile çakışan hale getirmek için önce  $x$ -ekseni ve sonra  $y$ -ekseni etrafında döndürelim. İsteğe bağlı  $\alpha$  dönme açısını belirlemek için,  $x$ -ekseni,  $xz$ -düzlemine yerleştirmek için kullanılan eksenler etrafında, önce birim vektörü Şekil 3.29a'da gösterilen  $yz$ -düzlemi boyunca yansıtalım. Vektörlerin keyfi eksen boyunca doğrultman kosinüsleri  $c_y$  ve  $c_z$  olsun. Şekil 3.29a'dan;

$$d = \sqrt{c_y^2 + c_z^2} \quad (3.63)$$

$$\cos \alpha = \frac{c_z}{d} \quad \sin \alpha = \frac{c_y}{d} \quad (3.64)$$

elde edilir.  $x$ -ekseni etrafında  $xz$ -düzleminde döndükten sonra, birim vektörün  $z$  bileşeni  $d$  ve  $x$  bileşeni  $c_x$ , Şekil 3.29b'de gösterilen  $x$  yönü de kosinüs yönüdür. Birim vektörün uzunluğu 1'dir. Dolayısıyla,  $y$ -ekseni ile rastgele bir eksenini meydana getirmek için gereken  $z$ -ekseni etrafında dönme açısı  $\beta$  ise

$$\cos \beta = d = \frac{c_y}{d} \quad \sin \beta = c_x = \frac{c_x}{d} \quad (3.65)$$

olur. O zaman birleştirilmiş dönüşüm matrisi

$$[M] = [T][R_x][R_y][R_z][R_y]^{-1}[R_x]^{-1}[T]^{-1} \quad (3.66)$$

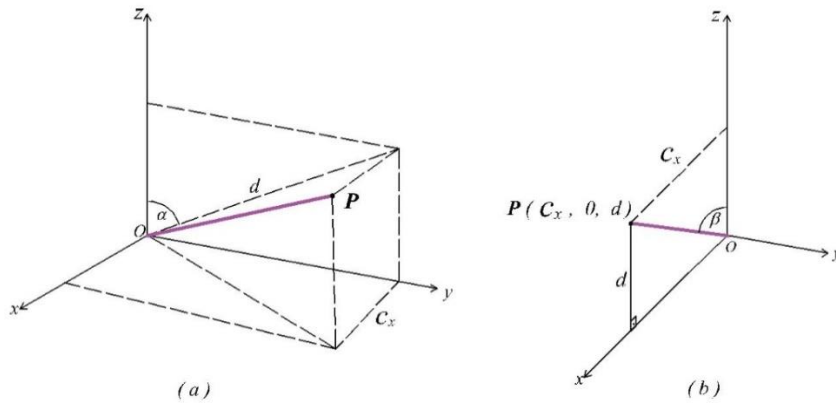
olur. Gerekli öteleme matrisi olduğundan

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & -y_0 & -z_0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

$x$ -ekseni etrafında dönme için dönüşüm matrisi

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_z/d & c_y/d & 0 \\ 0 & -c_y/d & c_z/d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

olur [6].



**Şekil 3.29.**  $OP$  Birim vektörünü  $z$ -ekseniyle çakıştırarak dönmeler. (a)  $x$  etrafında dönme; (b)  $y$  etrafında dönme.

ve  $y$  -ekseni etrafında döndürme ile

$$[R_y] = \begin{bmatrix} \cos(-\beta) & 0 & -\sin(-\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(-\beta) & 0 & \cos(-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & 0 & c_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_x & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

elde edilir. Son olarak, keyfi bir eksen etrafındaki dönme,  $z$  -ekseni etrafındaki dönme matrisi ile

$$R_\delta = \begin{bmatrix} \cos \delta & \sin \delta & 0 & 0 \\ -\sin \delta & \cos \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

olarak verilir [4,6].  $[R_z]$  ve  $[R_y]$  Dönme matrisleri denklem (3.63), (3.65) ile (3.66) arasında ve bir karekök hesaplaması ile elde edilir. Birinci durumda keyfi eksenle geliştirilse de bu sonuçlar tüm durumlara uygulanabilir. Eğer keyfi eksenin doğrultu kosinüsleri bilinmiyorsa,  $(x_1, y_1, z_1)$  vektörü birinci noktadan ikinci noktaya normalleştirilerek, eksen üzerinde ikinci bir nokta alınarak elde edilir. Özellikle, eksen boyunca gelen vektör  $(x_0, y_0, z_0)$  ile  $(x_1, y_1, z_1)$ ,

$$[V] = [(x_1 - x_0) \quad (y_1 - y_0) \quad (z_1 - z_0)]$$

ile elde edilir. Normalleştirilmiş, doğrultman kosinüslerini

$$[c_x \quad c_y \quad c_z] = \frac{[(x_1 - x_0) \quad (y_1 - y_0) \quad (z_1 - z_0)]}{[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.71)$$

ile verilir [6]. Bir örnek prosedürü tam olarak göstermektedir.

### Örnek 3.2.9.1. Keyfi Bir Eksen Etrafında Dönme

> #Bir köşesi çıkartılmış küpü düşünelim. Köşeler için konum vektörleri;

> X:=matrix([[2,1,2,1],[3,1,2,1],[3,1.5,2,1],[2.5,2,2,1],[2,2,2,1],[2,1,1,1],[3,1,1,1],[3,2,1,1],[2,2,1],[3,2,1.5,1]]);

$$X := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1.5 & 2 & 1 \\ 2.5 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Küp,  $F$  noktasından ve çapraz olarak karşıt köşeden geçen bir yerel eksen tarafından  $-45^\circ$  döndürülmelidir. Eksen karşı köşeye yönlendirilir ve  $F$  köşesi yüzünün ortasından geçer.

İlk önce, dönme ekseninin doğrultman kosinüslerini belirleyelim.  $CDJ$  üçgeninin kestiği köşe aynı zamanda eksenin üzerinde, denklem (3.71)'de;

> with(linalg):

> y:=matrix([[3-2,2-1,2-1]]);

$$y := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

> matrix([[1,1,1]])/sqrt((3-2)^2+(2-1)^2+(2-1)^2);

$$\frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sqrt{3}}{3}$$

> d:=sqrt((1/sqrt(3))^2+(1/sqrt(3))^2);

$$d := \frac{\sqrt{6}}{3}$$

> alpha:=convert(cos([1/sqrt(3)]/sqrt(2/3))^(-1),degrees);

$$\alpha := \frac{180 \text{ degrees}}{\cos\left(\frac{\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \end{bmatrix} \sqrt{6}}{2}\right) \pi}$$

> convert(1/sqrt(2),degrees);

$$\frac{90\sqrt{2} \text{ degrees}}{\pi}$$

> **alpha:=45\*degrees;**

$$\alpha := 45 \text{ degrees}$$

> **convert(2/sqrt(6),degrees);**

$$\frac{60\sqrt{6} \text{ degrees}}{\pi}$$

> **beta:=35.26\*degrees;**

$$\beta := 35.26 \text{ degrees}$$

> **#Öteleme matrisi:**

> **T1:=matrix([[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[-2,-1,-1,1]]);**

$$T1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

> **Rx:=matrix([[1,0,0,0],[0,cos(Pi/4),sin(Pi/4),0],[0,-sin(Pi/4),cos(Pi/4),0],[0,0,0,1]]);#x-  
eksenine göre dönme matrisi**

$$Rx := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> **Ry:=matrix([[2/sqrt(6),0,1/sqrt(3),0],[0,1,0,0],[-1/sqrt(3),0,2/sqrt(6),0],[0,0,0,1]]);#y-  
eksenine göre dönme matrisi**

$$Ry := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$[R_x]^{-1}$ ,  $[R_y]^{-1}$  ve  $[T]^{-1}$  sırasıyla denklem (3.22) ile (3.24) içinde  $-\alpha$ ,  $-\beta$  ve  $(x_0, y_0, z_0)$  yerine  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $(-x_0, -y_0, -z_0)$  koyarak elde edilir.  $[T][R_x][R_y]$  birleştirilirse,

> **#Birleştirilmiş dönüşüm:**

> **with(linalg):**

> **matrix(T1)\*matrix(Rx)\*matrix(Ry)=multiply(T1,Rx,Ry);**

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{6} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{6} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{3} & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

> **M:=matrix([[2/sqrt(6),0,1/sqrt(3),0],[-1/sqrt(6),1/sqrt(2),1/sqrt(3),0],[-1/sqrt(6),1/sqrt(2),1/sqrt(3),0],[-2/sqrt(6),0,-4/sqrt(3),1]]);**

$$M := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{4\sqrt{3}}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

> **matrix(X)\*matrix(M)=multiply(X,M);**

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1.5 & 2 & 1 \\ 2.5 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{4\sqrt{3}}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 1 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & 1 \\ 0.083333333\sqrt{6} & -0.250000000\sqrt{2} & 0.833333333\sqrt{3} & 1 \\ -0.166666666\sqrt{6} & 0 & 0.833333337\sqrt{3} & 1 \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 1 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & 1 \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 1 \\ 0.083333334\sqrt{6} & 0.250000000\sqrt{2} & 0.833333334\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

> #ara konum vektörleri:

```
>K:=matrix([[evalf(-sqrt(6)/6,3),evalf(-sqrt(2)/2,3),evalf(sqrt(3)/3,3),1],[evalf(sqrt(6)/6,3),evalf(-sqrt(2)/2,3),evalf(2*sqrt(3)/3,3),1],[evalf(0.0833*sqrt(6),3),evalf(-0.250*sqrt(2),3),evalf(0.833*sqrt(3),3),1],[evalf(-0.166*sqrt(6),3),0,evalf(0.833*sqrt(3),3),1],[evalf(-sqrt(6)/3,3),0,evalf(2*sqrt(3)/3,3),1],[0,0,0,0],[evalf(sqrt(6)/3,3),0,evalf(sqrt(3)/3,3),1],[evalf(sqrt(6)/6,3),evalf(sqrt(2)/2,3),evalf(2*sqrt(3)/3,3),1],[evalf(-sqrt(6)/6,3),evalf(sqrt(2)/2,3),evalf(sqrt(3)/3,3),1],[evalf(0.0833*sqrt(6),3),evalf(0.250*sqrt(2),3),evalf(0.833*sqrt(3),3),1]]);
```

$$K := \begin{bmatrix} -0.409 & -0.705 & 0.576 & 1 \\ 0.409 & -0.705 & 1.15 & 1 \\ 0.204 & -0.352 & 1.44 & 1 \\ -0.407 & 0 & 1.44 & 1 \\ -0.816 & 0 & 1.15 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.816 & 0 & 0.576 & 1 \\ 0.409 & 0.705 & 1.15 & 1 \\ -0.409 & 0.705 & 0.576 & 1 \\ 0.204 & 0.352 & 1.44 & 1 \end{bmatrix}$$

>S:=matrix([[sqrt(2)/2,-sqrt(2)/2,0,0],[sqrt(2)/2,-sqrt(2)/2,0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,1]]);#z-eksenine göre dönme matrisi

$$S := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> **T2:=inverse(T1);**

$$T2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

> **R1:=inverse(Rx);**

$$R1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> **R2:=inverse(Ry);**

$$R2 := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> **matrix(R2)\*matrix(R1)\*matrix(T2)=multiply(R2,R1,T2);**

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{6} & -\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{6} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{6}\sqrt{2}}{6} & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu sonuç, tek tek  $[M]$  matrisinin bileşen matrislerinin terslerini birleştirerek veya biçimsel olarak  $[M]$  'nin tersini alarak elde edilir. Bu arada,  $[R_x][R_y]$  'nin saf bir dönme olduğuna dikkat edelim.  $[M]^{-1}$  'in sol üst 3x3 alt matrisi,  $[M]$  'nin sol üst 3x3 alt matrisinin transpozudur [6].

**>M1:=matrix([[2/sqrt(6),-1/sqrt(6),-1/sqrt(6),0],[0,1/sqrt(2),-1/sqrt(2),0],[1/sqrt(3),1/sqrt(3),1/sqrt(3),0],[2,1,1,1]]);**

$$M1 := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**> with(linalg):**

**> matrix(M)\*matrix(S)\*matrix(M1)=multiply(M,S,M1);**

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{4\sqrt{3}}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + \left[ \frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{1}{3}, 0 \right],$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\left(-\frac{\sqrt{6}\sqrt{2}}{12} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{6}}{3} + \frac{1}{3}, -\frac{\left(-\frac{\sqrt{6}\sqrt{2}}{12} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{6}}{6} \\ + \frac{\left(\frac{\sqrt{6}\sqrt{2}}{12} - \frac{1}{2}\right)\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3}, -\frac{\left(-\frac{\sqrt{6}\sqrt{2}}{12} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{6}}{6} \\ - \frac{\left(\frac{\sqrt{6}\sqrt{2}}{12} - \frac{1}{2}\right)\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3}, 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[ \begin{aligned} & \left( \frac{-\frac{\sqrt{6}\sqrt{2}}{12} - \frac{1}{2}}{3} \right) \sqrt{6} + \frac{1}{3}, -\frac{\left( -\frac{\sqrt{6}\sqrt{2}}{12} - \frac{1}{2} \right) \sqrt{6}}{6} \\ & + \frac{\left( \frac{\sqrt{6}\sqrt{2}}{12} + \frac{1}{2} \right) \sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3}, -\frac{\left( -\frac{\sqrt{6}\sqrt{2}}{12} - \frac{1}{2} \right) \sqrt{6}}{6} \\ & - \frac{\left( \frac{\sqrt{6}\sqrt{2}}{12} + \frac{1}{2} \right) \sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3}, 0 \end{aligned} \right]$$

$$\left[ -\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3}, \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{1}{3}, 1 \right]$$

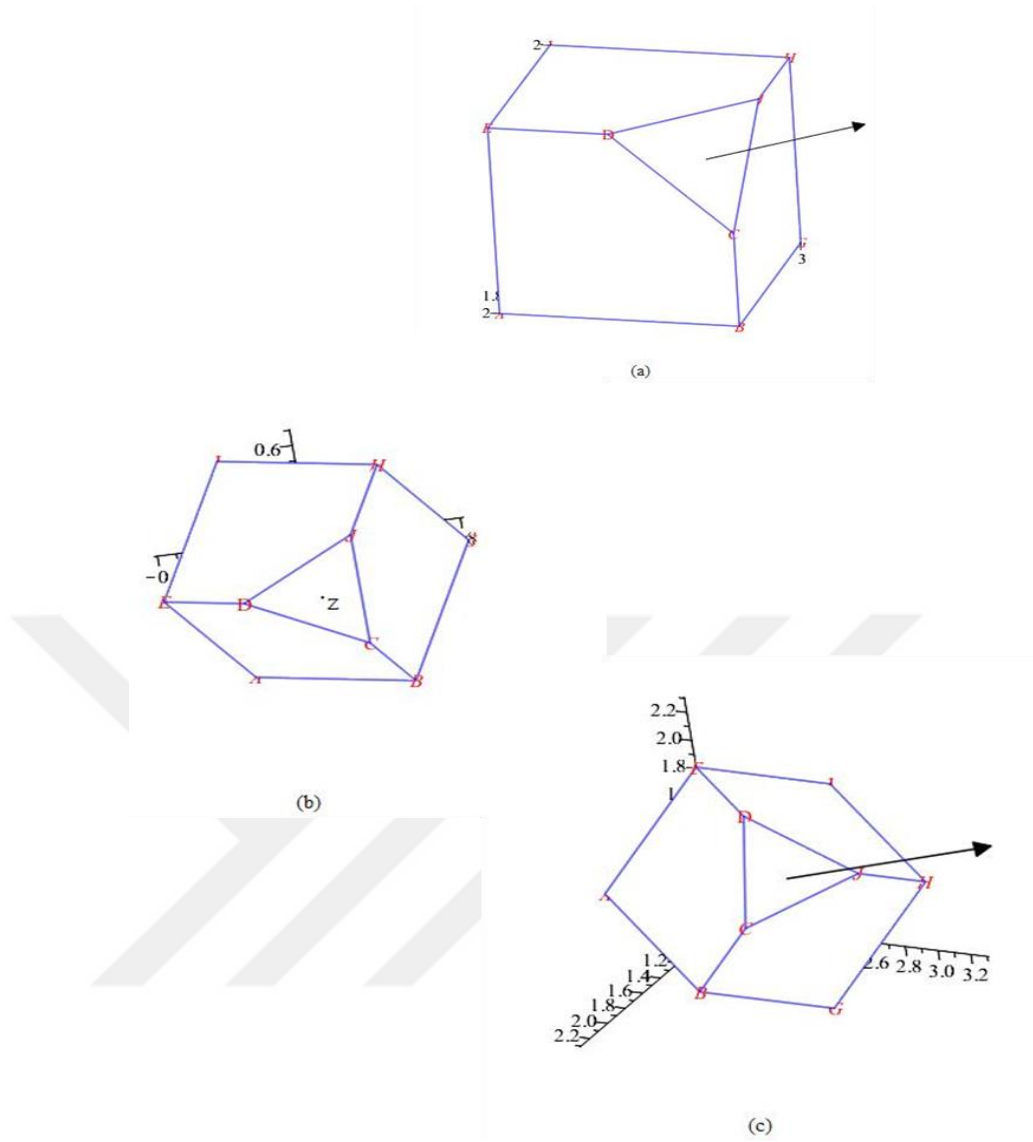
**>T4:=matrix([[0.805,-0.311,0.506,0],[0.506,0.805,-0.311,0],[-0.311,0.506,0.805,0],[0.195,0.311,-0.506,1]]);**

$$T4 := \begin{bmatrix} 0.805 & -0.311 & 0.506 & 0 \\ 0.506 & 0.805 & -0.311 & 0 \\ -0.311 & 0.506 & 0.805 & 0 \\ 0.195 & 0.311 & -0.506 & 1 \end{bmatrix}$$

**> matrix(X)\*matrix(T4)=multiply(X,T4);**

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1.5 & 2 & 1 \\ 2.5 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.805 & -0.311 & 0.506 & 0 \\ 0.506 & 0.805 & -0.311 & 0 \\ -0.311 & 0.506 & 0.805 & 0 \\ 0.195 & 0.311 & -0.506 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.689 & 1.506 & 1.805 & 1 \\ 2.494 & 1.195 & 2.311 & 1 \\ 2.7470 & 1.5975 & 2.1555 & 1. \\ 2.5975 & 2.1555 & 1.7470 & 1. \\ 2.195 & 2.311 & 1.494 & 1 \\ 2.000 & 1.000 & 1.000 & 1 \\ 2.805 & 0.689 & 1.506 & 1 \\ 3.311 & 1.494 & 1.195 & 1 \\ 2.506 & 1.805 & 0.689 & 1 \\ 3.1555 & 1.7470 & 1.5975 & 1. \end{bmatrix}$$

dönüştürülen nesne Şekil 3.30c'de gösterilmektedir.



Şekil 3.30. Keyfi bir eksen etrafında dönme

### 3.2.10. Keyfi Bir Düzlem Boyunca Yansıma

(3.56), (3.57) ve (3.58) denklemlerinde verilen dönüşümler sırasıyla  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$  koordinat düzlemlerinde yansılara neden olur. Genellikle bir nesneyi bunlardan birinden başka bir düzlem boyunca yansıtmak gerektiğinde daha önceden verilen yansıma yöntemleri geçerli olmaz. Keyfi bir düzleme göre yansıma dönüşümü, daha önce tanımlanmış basit dönüşümleri içeren

- 1- Yansıma düzlemindeki bilinen  $P$  noktasını koordinat sisteminin orijinine öteleyelim.
- 2- Normal vektörü,  $+z$ -ekseni ile çakışana kadar orijin etrafında yansıma düzlemine döndürelim (bakınız Bölüm 3.2.9, denklem 3.68 ve 3.69); bu yansıma düzlemini  $z=0$  koordinat düzlemi yapar.

3- Ayrıca yukarıdaki dönüşümleri nesneye uyguladıktan sonra, nesneyi  $z=0$  koordinat düzlemi boyunca yansıtalım.

4- İstenen sonucu elde etmek için yukarıda verilenlere ters dönüşümleri yapalım.

algoritması kullanılarak gerçekleştirilebilir [6]. O zaman genel yansıma dönüşümü

$$[M] = [T][R_x][R_y][R_{flt_z}][R_y]^{-1}[R_x]^{-1}[T]^{-1}$$

olur. Burada  $[T], [R_x], [R_y]$  matrisleri sırasıyla (3.67), (3.68) ve (3.69) denklemlerinde verilmiştir. Yansıma düzlemindeki  $P$  noktasının bileşenleri  $(x_0, y_0, z_0) = (P_x, P_y, P_z)$ ; ve normalin yansıma düzleminde olan doğrultman kosinüsleri  $(c_x, c_y, c_z)$  dir [6,7].

#### Örnek 3.2.10.1. Keyfi Bir Düzlem Boyunca Yansıma

> #Bir köşesi çıkartılmış küpü düşünelim. Küpü CDJ üçgenini içeren düzlem boyunca yansıtalım.

> with(linalg):

> T1:=matrix([[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[-3,-3/2,-2,1]]);

$$T1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -\frac{3}{2} & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

> #CJ ve CD vektörlerinin karma çarpımı sonucu ve ötelemeden önce

> n:=(J)-[C]\*([D]-[C]);

$$n := [-C + J] [-C + D]$$

> CJ:=(3-3),(2-1.5),(1.5-2)];

$$CJ := [0, 0.5, -0.5]$$

> CD:=(2.5-3),(2-1.5),(2-2)];

$$CD := [-0.5, 0.5, 0]$$

> K:=crossprod(CJ,CD);

$$K := [ 0.25 \ 0.25 \ 0.25 ]$$

> u:=[0.25,0.25,0.25];

$$u := [0.25, 0.25, 0.25]$$

> **u/norm(u,2);**

[0.5773502692, 0.5773502692, 0.5773502692]

> **d:=sqrt((1/sqrt(3))^2+(1/sqrt(3))^2);**

$$d := \frac{\sqrt{6}}{3}$$

> **#z-ekseni ile c'yi çakıştırmak için dönme matrisleri:**

> **alpha:=cos([1/sqrt(3)]/sqrt(2/3))^(-1);**

$$\alpha := \frac{1}{\cos\left(\frac{\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\right]\sqrt{6}}{2}\right)}$$

> **alpha:=convert(cos([1/sqrt(3)]/sqrt(2/3))^(-1),degrees);**

$$\alpha := \frac{180 \text{ degrees}}{\cos\left(\frac{\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\right]\sqrt{6}}{2}\right) \pi}$$

> **convert(1/sqrt(2),degrees);**

$$\frac{90\sqrt{2} \text{ degrees}}{\pi}$$

> **alpha:=45\*degrees;**

$$\alpha := 45 \text{ degrees}$$

> **convert(2/sqrt(6),degrees);**

$$\frac{60\sqrt{6} \text{ degrees}}{\pi}$$

> **beta:=35.26\*degrees;**

$$\beta := 35.26 \text{ degrees}$$

> **Rx:=matrix([[1,0,0,0],[0,cos(Pi/4),sin(Pi/4),0],[0,-sin(Pi/4),cos(Pi/4),0],[0,0,0,1]]);#x-**

**eksenine göre dönme matrisi**

$$R_x := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> **Ry:=matrix([[2/sqrt(6),0,1/sqrt(3),0],[0,1,0,0],[-1/sqrt(3),0,2/sqrt(6),0],[0,0,0,1]]);#y-**

**eksenine göre dönme matrisi**

$$R_y := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$[R_x]^{-1}, [R_y]^{-1}$  ve  $[T]^{-1}$  matrisleri  $-\alpha, -\beta$  ve  $[x_0 \ y_0 \ z_0] = [C]$ 'yi denklem (3.67), (3.68) ve (3.69)'da yerine koyularak elde edilir.

$[T], [R_x]$  ve  $[R_y]$  birleştirildiğinde;

> #Birleştirilmiş dönüşüm:

> **matrix(T1)\*matrix(Rx)\*matrix(Ry)=multiply(T1,Rx,Ry);**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -\frac{3}{2} & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{6} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{6} & 0 \\ -\sqrt{6} + \frac{7\sqrt{2}\sqrt{3}}{12} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\sqrt{3} - \frac{7\sqrt{2}\sqrt{6}}{12} & 1 \end{bmatrix}$$

> **M:=matrix([[2/sqrt(6),0,1/sqrt(3),0],[-1/sqrt(6),1/sqrt(2),1/sqrt(3),0],[-1/sqrt(6),-1/sqrt(2),1/sqrt(3),0],[-5/2\*sqrt(6),1/2\*sqrt(2),-13/2\*sqrt(3),1]]);**

$$M := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{5\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{13\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

> **X:=matrix([[2,1,2,1],[3,1,2,1],[3,1.5,2,1],[2.5,2,2,1],[2,2,2,1],[2,1,1,1],[3,1,1,1],[3,2,1,1],[2,2,1,1],[3,2,1.5,1]]);**

$$X := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1.5 & 2 & 1 \\ 2.5 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1.5 & 1 \end{bmatrix}$$

> with(linalg):

> matrix(X)\*matrix(M)=multiply(X,M);

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1.5 & 2 & 1 \\ 2.5 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{5\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{13\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{7\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{29\sqrt{3}}{6} & 1 \\ -2\sqrt{6} & 0 & -\frac{9\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -2.083333333\sqrt{6} & 0.250000000\sqrt{2} & -4.333333333\sqrt{3} & 1. \\ -2.333333333\sqrt{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -4.333333333\sqrt{3} & 1. \\ -\frac{5\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{9\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{13\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{31\sqrt{3}}{6} & 1 \\ -\frac{11\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{29\sqrt{3}}{6} & 1 \\ -2\sqrt{6} & \sqrt{2} & -\frac{9\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{7\sqrt{6}}{3} & \sqrt{2} & -\frac{29\sqrt{3}}{6} & 1 \\ -2.083333333\sqrt{6} & 0.750000000\sqrt{2} & -4.333333333\sqrt{3} & 1. \end{bmatrix}$$

> #ara konum vektörleri:

>R:=matrix([[evalf(-7\*sqrt(6)/3,3),0,evalf(-29\*sqrt(3)/6,3),1],[evalf(-2\*sqrt(6),3),0,evalf(-9\*sqrt(3)/2,3),1],[evalf(-2.083\*sqrt(6),3),evalf(0.250\*sqrt(2),3),evalf(-

$4.33\sqrt{3},3,1],[\text{evalf}(-2.33\sqrt{6},3),\text{evalf}(\sqrt{2}/2,3),\text{evalf}(-4.33\sqrt{3},3),1],[\text{evalf}(-$   
 $5\sqrt{6}/2,3),\text{evalf}(\sqrt{2}/2,3),\text{evalf}(-9\sqrt{3}/2,3),1],[\text{evalf}(-$   
 $13\sqrt{6}/6,3),\text{evalf}(\sqrt{2}/2,3),\text{evalf}(-31\sqrt{3}/6,3),1],[\text{evalf}(-$   
 $11\sqrt{6}/6,3),\text{evalf}(\sqrt{2}/2,3),\text{evalf}(-29\sqrt{3}/6,3),1],[\text{evalf}(-$   
 $2\sqrt{6},3),\text{evalf}(\sqrt{2},3),\text{evalf}(-9\sqrt{3}/2,3),1],[\text{evalf}(-$   
 $7\sqrt{6}/3,3),\text{evalf}(\sqrt{2},3),\text{evalf}(-29\sqrt{3}/6,3),1],[\text{evalf}(-$   
 $2.0833\sqrt{6},3),\text{evalf}(0.750\sqrt{2},3),\text{evalf}(-4.333\sqrt{3},3),1]]);$

$$R := \begin{bmatrix} -5.71 & 0 & -8.36 & 1 \\ -4.90 & 0 & -7.78 & 1 \\ -5.10 & 0.352 & -7.49 & 1 \\ -5.71 & 0.705 & -7.49 & 1 \\ -6.12 & 0.705 & -7.78 & 1 \\ -5.32 & 0.705 & -8.94 & 1 \\ -4.48 & 0.705 & -8.36 & 1 \\ -4.90 & 1.41 & -7.78 & 1 \\ -5.71 & 1.41 & -8.36 & 1 \\ -5.10 & 1.06 & -7.49 & 1 \end{bmatrix}$$

> **Rflt:=matrix([[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,-1,0],[0,0,0,1]]);#z=0 düzlemi boyunca yansıma**

$$Rflt := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> **T2:=inverse(T1);**

$$T2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

> **R1:=inverse(Rx);**

$$R1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> **R2:=inverse(Ry);**

$$R2 := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dönüştürülen nesneyi uzayda "orijinal" konumuna getirmek için,

**> matrix(R2)\*matrix(R1)\*matrix(T2)=multiply(R2,R1,T2);**

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{6} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{6} & 0 \\ 3 & \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

**>M1:=matrix([[2/sqrt(6),-1/sqrt(6),-1/sqrt(6),0],[0,1/sqrt(2),-1/sqrt(2),0],[1/sqrt(3),1/sqrt(3),1/sqrt(3),0],[3,3/2,2,1]]);**

$$M1 := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 3 & \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

**> with(linalg):**

**> matrix(M)\*matrix(Rflt)\*matrix(M1)=multiply(M,Rflt,M1);**

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{5\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{13\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 3 & \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{9}{2} & 11 & \frac{21}{2} & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

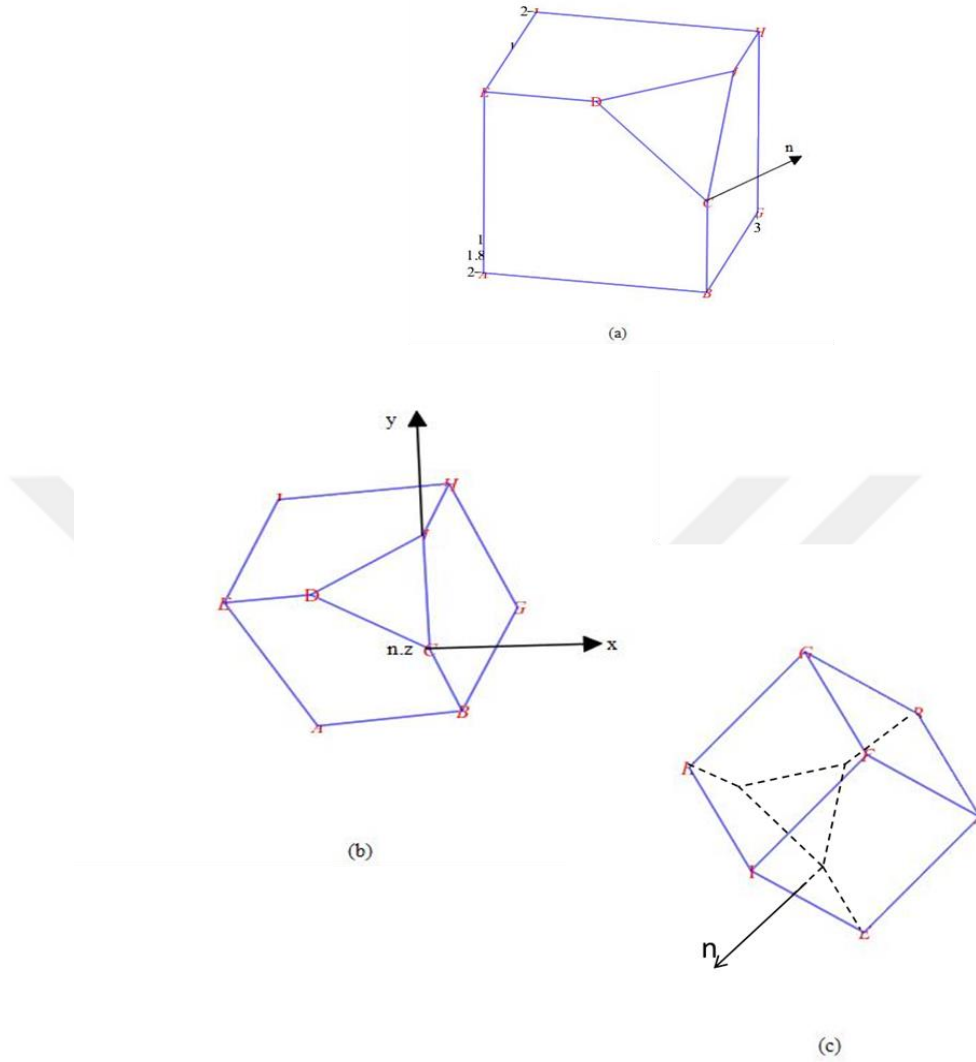
> T4:=matrix([[1/3,-2/3,-2/3,0],[-2/3,1/3,-2/3,0],[-2/3,-2/3,1/3,0],[9/2,11,21/2,1]]);

$$T4 := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{9}{2} & 11 & \frac{21}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

> matrix(X)\*matrix(T4)=multiply(X,T4);

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1.5 & 2 & 1 \\ 2.5 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{9}{2} & 11 & \frac{21}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{6} & \frac{26}{3} & \frac{55}{6} & 1 \\ \frac{7}{2} & 8 & \frac{17}{2} & 1 \\ 3.166666667 & 8.166666667 & 8.166666667 & 1. \\ 2.666666667 & 8.666666667 & 8.166666667 & 1. \\ \frac{5}{2} & 9 & \frac{17}{2} & 1 \\ \frac{23}{6} & \frac{28}{3} & \frac{53}{6} & 1 \\ \frac{25}{6} & \frac{26}{3} & \frac{49}{6} & 1 \\ \frac{7}{2} & 9 & \frac{15}{2} & 1 \\ \frac{19}{6} & \frac{29}{3} & \frac{49}{6} & 1 \\ 3.166666667 & 8.666666667 & 7.666666667 & 1. \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Dönüştürülen nesne Şekil 3.31c'de gösterilmektedir.



Şekil 3.31. Keyfi bir düzleme göre yansıma

### 3.2.10.1. Orijinden Geçmeyen Bir Düzleme Göre Yansıma

**Teorem 3.2.10.1.1.**  $R^3$  uzayında verilen  $P = (x, y, z)$  noktasının,  $R^3$  uzayının bir alt uzayı olmayan  $Ax + By + Cz = D$  düzlemine göre yansımasını (simetriğini) veren dönüşümün matrisi:

$$Sim_d(x, y) = \frac{1}{A^2 + B^2 + C^2} \begin{bmatrix} x(A^2 + B^2 + C^2) - 2A(Ax + By + Cz - D) \\ y(A^2 + B^2 + C^2) - 2B(Ax + By + Cz - D) \\ z(A^2 + B^2 + C^2) - 2C(Ax + By + Cz - D) \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlanan lineer olmayan bir dönüşümdür. Bu dönüşümü,

$$Sim_d : R^2 \times \{1\} \rightarrow R^2 \times \{1\}$$

şeklinde lineer bir dönüşüm olarak ifade edebiliriz. Buna göre dönüşüm matrisini

$$T = \frac{1}{A^2 + B^2 + C^2} \begin{bmatrix} -A^2 + B^2 + C^2 & -2AB & -2AC & 2AD \\ -2AB & A^2 - B^2 + C^2 & -2BC & 2BD \\ -2AB & -2BC & A^2 + B^2 - C^2 & 2CD \\ 0 & 0 & 0 & A^2 + B^2 + C^2 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

biçiminde ifade edebiliriz [12] .

### Örnek 3.2.10.1.1. Orijinden Geçmeyen Düzleme Göre Yansıma

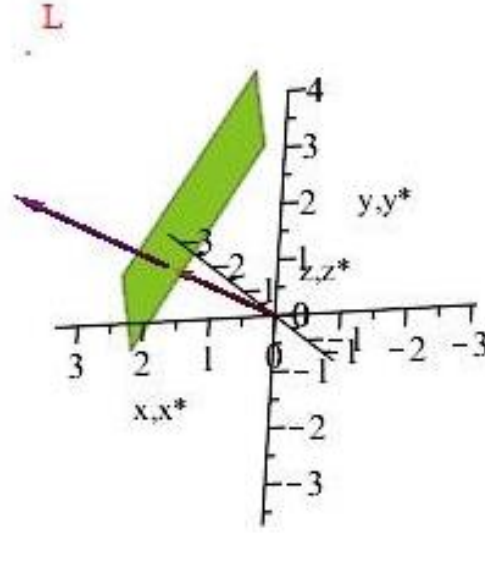
$R^3$  uzayında verilen  $L(3,4,2)$  noktasının,  $2x + y + z = 4$  düzlemine göre simetriği olan noktayı bulalım.

$2x + y + z = 0$  düzlemine göre simetri dönüşümü, yukarıdaki yansıma dönüşümü yardımıyla

$$\begin{aligned} T \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} &= \frac{1}{3^2 + 4^2 + 2^2} \begin{bmatrix} -3^2 + 4^2 + 2^2 & -2.3.4 & -2.4.2 & 2.3.1 \\ -2.3.4 & 3^2 - 4^2 + 2^2 & -2.4.2 & 2.4.1 \\ -2.3.2 & -2.4.2 & 3^2 + 4^2 - 2^2 & 2.2.1 \\ 0 & 0 & 0 & 3^2 + 4^2 + 2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{29} \begin{bmatrix} 11 & -24 & -16 & 6 \\ -24 & -3 & -16 & 8 \\ -12 & -16 & 21 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{29} & \frac{-24}{29} & \frac{-16}{29} & \frac{6}{29} \\ \frac{-24}{29} & \frac{-3}{29} & \frac{-16}{29} & \frac{8}{29} \\ \frac{-12}{29} & \frac{-16}{29} & \frac{21}{29} & \frac{4}{29} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-89}{29} \\ \frac{-108}{29} \\ \frac{-54}{29} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Yani  $L(3,4,2)$  noktasının,  $2x + y + z = 4$  düzlemine göre simetriği olan nokta

$L'(\frac{-89}{29}, \frac{-108}{29}, \frac{-54}{29})$  elde edilir.



Şekil 3.32. Orijinden geçmeyen düzleme göre yansıma

### 3.3. Fibonacci ve Lucas 3-Vektörlerinde Dönüşümler ve MAPLE Uygulamaları

Tezin bu bölümünde, üç boyutlu uzaydaki yerel ölçeklendirme, genel ölçeklendirme, meyillenme, yansıma, dönme, öteleme ve çoklu dönüşümler uygulamaları; materyal ve yöntem kısmında temel kavramlarını verdiğimiz Fibonacci ve Lucas 3-vektörlerinin özelliklerini kullanarak, Fibonacci ve Lucas 3-vektörlerinin Öklid 3-uzayındaki dönüşüm matrisleri hesaplandı. Her dönüşüm ile ilgili örnek verilerek, şekillerin Maple programında çizimi yapıldı.

#### 3.3.1. Fibonacci ve Lucas 3-Vektörlerinde Ölçeklendirme

$\vec{F}_n^{3T} = [F_n \ F_{n+1} \ F_{n+2}]$ , Fibonacci 3-vektörüne yerel ölçeklendirme dönüşümünü; denklem (3.47) uygulanırsa

$$\begin{aligned} [\vec{F}_n^{3T}][T] &= [F_n \ F_{n+1} \ F_{n+2} \ 1] \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= [aF_n \ eF_{n+1} \ jF_{n+2} \ 1] = [F_n^* \ F_{n+1}^* \ F_{n+2}^* \ 1] \end{aligned} \quad (3.73)$$

$\vec{L}_n^{3T} = [L_n \ L_{n+1} \ L_{n+2}]$ , Lucas 3-vektörüne yerel ölçeklendirme dönüşümünü uygulandırsa

$$\begin{aligned} [\vec{L}_n^{3T}][T] &= [L_n \ L_{n+1} \ L_{n+2} \ 1] \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= [aL_n \ eL_{n+1} \ jL_{n+2} \ 1] = [L_n^* \ L_{n+1}^* \ L_{n+2}^* \ 1] \end{aligned} \quad (3.74)$$

Yerel ölçeklendirme etkisini sonucu elde edilir. Bir örnek ile dönüşümü uygulayalım.

### Örnek 3.3.1.1. Fibonacci 3-vektöründe ölçeklendirme

Homojen konum vektörleri  $\vec{F}_1^{3T} = [F_1 \ F_2 \ F_3 \ 1] = [1 \ 1 \ 2 \ 1]$  olarak bilinen  $\vec{F}_1^{3T}$  Fibonacci 3-vektörünün sırasıyla  $x, y, z$  eksenleri boyunca 2,2,3 ölçek faktörleri ile yerel ölçeklendirme dönüşümü

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere bu dönüşüm, denklem (3.73) kullanılarak;  $\vec{F}_1^{3T}$  Fibonacci 3-vektörüne uygulandığında

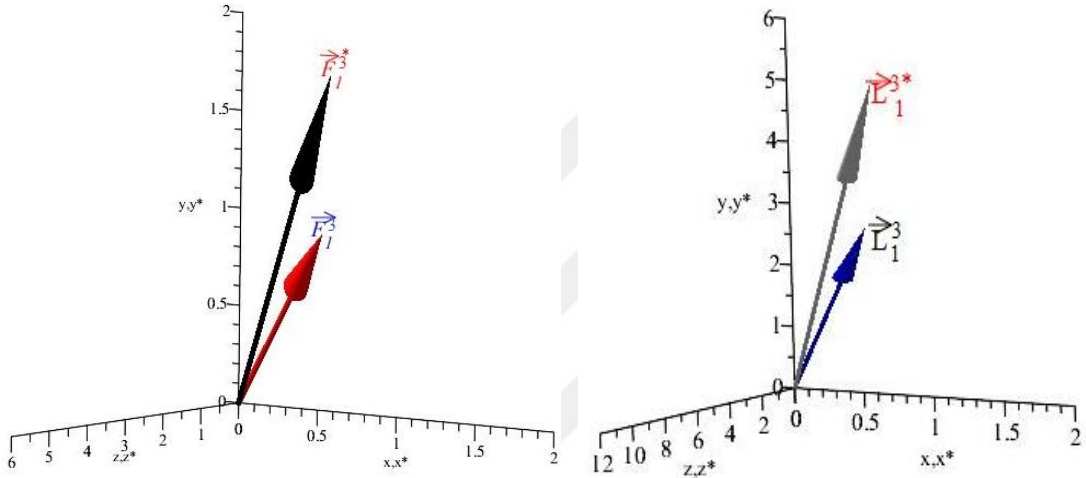
$$[\vec{F}_1^{3T*}] = [\vec{F}_1^{3T}][T] = [1 \ 1 \ 2 \ 1] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [2 \ 2 \ 6 \ 1]$$

sonucu elde edilir. Aynı dönüşüm, denklem (3.74) kullanılarak;

$\vec{L}_1^{3T} = [L_1 \ L_2 \ L_3 \ 1] = [1 \ 3 \ 4 \ 1]$  vektörüne uygulanırsa

$$\begin{bmatrix} \vec{L}_1^{3T*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{L}_1^{3T} \end{bmatrix} [T] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

$\vec{F}_1^{3T}$  ve  $\vec{L}_1^{3T}$  Fibonacci ve Lucas 3-vektörlerinin yerel ölçeklendirme sonucu oluşan konum vektörleri  $\vec{F}_1^{3T*} = [2 \ 2 \ 6 \ 1]$  ve  $\vec{L}_1^{3T*} = [2 \ 6 \ 12 \ 1]$ 'dir ve aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 3.33. Fibonacci ve Lucas 3-vektörlerinde ölçeklendirme

### Örnek 3.3.1.2. Fibonacci 3-Vektöründe Genel Ölçeklendirme

$\vec{F}_1^{3T}$  Fibonacci 3-vektörünün üç katına eşit büyüklüğünde ölçeklendirilmesi (boyutun üç katına çıkması)

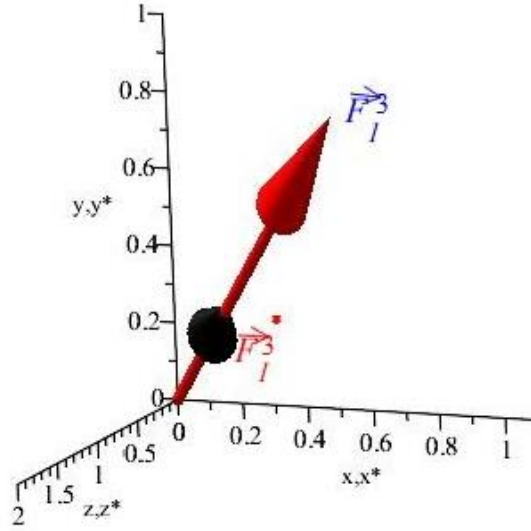
$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

denklem (3.48)'den dönüşümü ile yapılır.  $\vec{F}_1^{3T}$  Fibonacci 3-vektörüne bu dönüşüm uygulandığında

$$\left[ \vec{F}_1^{3T'} \right] = \left[ \vec{F}_1^{3T} \right] [T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

homojen konum vektörü elde edilir. Dönüştürülmüş konum vektörlerinin her biri için homojen koordinat faktörünün  $h=3$  olduğuna dikkat edelim. Bu nedenle, sıradan fiziksel koordinatları elde etmek için her konum vektörünün  $h$ 'a bölünmesi gerekir.

Sonuç  $\left[ \vec{F}_1^{3T'} \right] = \left[ 1/3 \quad 1/3 \quad 2/3 \quad 1 \right]$  olarak elde edilir ve aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 3.34. Fibonacci 3-vektöründe genel ölçeklendirme

### 3.3.2. Fibonacci ve Lucas 3-Vektörlerinde Meyillenme

$\vec{F}_n^{3T} = [F_n \quad F_{n+1} \quad F_{n+2}]$ , Fibonacci 3-vektörünün meyillenme dönüşümü denklem (3.49)'dan ,

$$\begin{aligned} \left[ \vec{F}_n^{3T} \right] [T] &= \begin{bmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} & 1 \\ 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ g & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_n + dF_{n+1} + gF_{n+2} & bF_n + F_{n+1} + iF_{n+2} & cF_n + fF_{n+1} + F_{n+2} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.75)$$

olarak elde edilir.

$\vec{L}_n^{3T} = [L_n \ L_{n+1} \ L_{n+2}]$ , Lucas 3-vektörüne meyillenme dönüşümü uygulayanırsa,

$$\begin{aligned} [\vec{L}_n^{3T}][T] &= [L_n \ L_{n+1} \ L_{n+2} \ 1] \begin{bmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ g & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= [L_n + dL_{n+1} + gL_{n+2} \quad bL_n + L_{n+1} + iL_{n+2} \quad cL_n + fL_{n+1} + L_{n+2} \quad 1] \end{aligned} \quad (3.76)$$

olarak elde edilir.

### Örnek 3.3.2.1. Fibonacci ve Lucas 3-Vektörlerinde Meyillenme

$\vec{F}_1^{3T}$  Fibonacci 3-vektörüne meyillenme dönüşümünü uygulandığında;

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0.75 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0.8 & 0 \\ 0.5 & 0.75 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

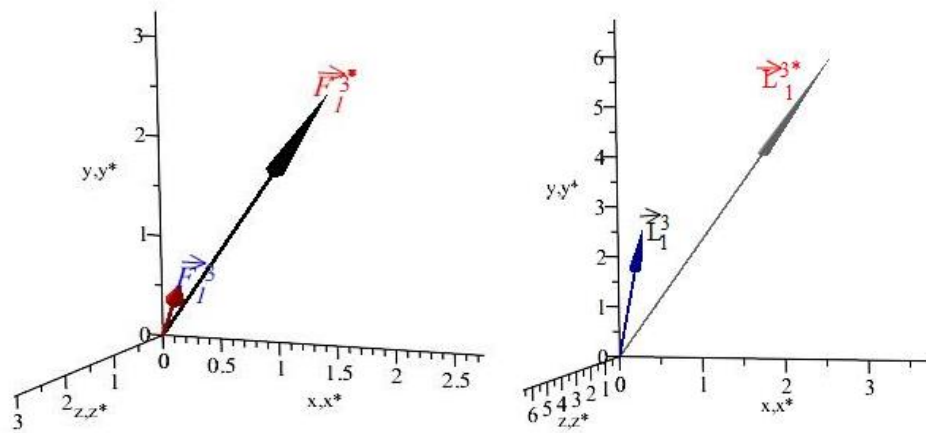
elde edilir. Denklem (3.75)'den ve

$$\begin{aligned} [\vec{F}_1^{3T*}] &= [\vec{F}_1^{3T}][T] = [1 \ 1 \ 2 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0.75 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0.8 & 0 \\ 0.5 & 0.75 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= [2.75 \ 3.25 \ 3.05 \ 1] \end{aligned}$$

Aynı dönüşüm  $\vec{L}_1^{3T} = [L_1 \ L_2 \ L_3 \ 1] = [1 \ 3 \ 4 \ 1]$  denklem (3.76) kullanılarak vektörüne uygulanırsa;

$$\begin{aligned} [\vec{L}_1^{3T*}] &= [\vec{L}_1^{3T}] [T] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.75 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0.8 & 0 \\ 0.5 & 0.75 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= [3.75 \quad 6.75 \quad 6.65 \quad 1] \end{aligned}$$

Sonuçlar;  $[\vec{F}_1^{3T*}] = [2.75 \quad 3.25 \quad 3.05 \quad 1]$  ve  $[\vec{L}_1^{3T*}] = [3.75 \quad 6.75 \quad 6.65 \quad 1]$  aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 3.35. Fibonacci ve Lucas 3-vektörlerinde meyillenme

### 3.3.3. Fibonacci ve Lucas 3-Vektörlerinde Dönme

$\vec{F}_n^{3T} = [F_n \quad F_{n+1} \quad F_{n+2}]$ , Fibonacci 3-vektörüne ve  $\vec{L}_n^{3T} = [L_n \quad L_{n+1} \quad L_{n+2}]$  Lucas 3-vektörüne x-ekseni etrafında  $\theta$  açısıyla dönme dönüşümü Denk(3.50)'den uygulandığında;

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
[\vec{F}_n^{3T}][T] &= [F_n \quad F_{n+1} \quad F_{n+2} \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= [F_n \quad F_{n+1} \cos \theta - F_{n+2} \sin \theta \quad F_{n+1} \sin \theta + F_{n+2} \cos \theta \quad 1]
\end{aligned} \tag{3.77}$$

ve

$$\begin{aligned}
[\vec{L}_n^{3T}][T] &= [L_n \quad L_{n+1} \quad L_{n+2} \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= [L_n \quad L_{n+1} \cos \theta - L_{n+2} \sin \theta \quad L_{n+1} \sin \theta + L_{n+2} \cos \theta \quad 1]
\end{aligned} \tag{3.78}$$

elde edilir.

Benzer bir şekilde,  $z$ -ekseni etrafında bir  $\Psi$  açısıyla dönme denklem (3.51) için dönüşüm matrisi;

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi & 0 & 0 \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
[\vec{F}_n^{3T}][T] &= [F_n \quad F_{n+1} \quad F_{n+2} \quad 1] \begin{bmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi & 0 & 0 \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= [F_n \cos \Psi + F_{n+1} \sin \Psi \quad -F_n \sin \Psi + F_{n+1} \cos \Psi \quad F_{n+2} \quad 1]
\end{aligned} \tag{3.79}$$

ve

$$\begin{aligned}
[\vec{L}_n^{3T}][T] &= [L_n \quad L_{n+1} \quad L_{n+2} \quad 1] \begin{bmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi & 0 & 0 \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= [L_n \cos \Psi + L_{n+1} \sin \Psi \quad -L_n \sin \Psi + L_{n+1} \cos \Psi \quad L_{n+2} \quad 1]
\end{aligned} \tag{3.80}$$

elde edilir.

y -ekseni etrafında bir  $\phi$  açısıyla dönme için, dönüşüm matrisi denklem (3.52)'den;

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
[\vec{F}_n^{3T}][T] &= [F_n \quad F_{n+1} \quad F_{n+2} \quad 1] \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= [F_n \cos \phi + F_{n+2} \sin \phi \quad F_{n+1} \quad -F_n \sin \phi + F_{n+2} \cos \phi \quad 1]
\end{aligned} \tag{3.81}$$

ve

$$\begin{aligned}
[\vec{L}_n^{3T}][T] &= [L_n \quad L_{n+1} \quad L_{n+2} \quad 1] \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= [L_n \cos \phi + L_{n+2} \sin \phi \quad L_{n+1} \quad -L_n \sin \phi + L_{n+2} \cos \phi \quad 1]
\end{aligned} \tag{3.82}$$

elde edilir.

### Örnek 3.3.3.1. Fibonacci ve Lucas 3-Vektörleride Dönme

$\left[ \vec{F}_2^{3T} \right]$  konum vektörü  $\vec{F}_2^{3T} = [F_2 \ F_3 \ F_4 \ 1] = [1 \ 2 \ 3 \ 1]$  olarak elde edilir.  $\vec{F}_2^{3T}$

Fibonacci 3-vektörüne  $y$ -ekseni etrafında  $\phi = 90^\circ$  açısıyla dönme uyguladığımızda

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dönüşümü elde edilir.  $\vec{F}_2^{3T}$  Fibonacci 3-vektörüne dönüşümün uygulanması ile

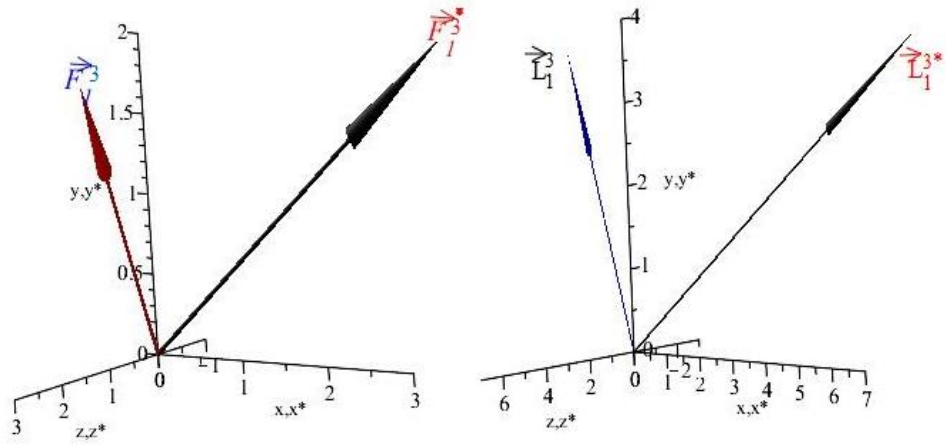
$$\begin{aligned} \left[ \vec{F}_2^{3T*} \right] &= \left[ \vec{F}_2^{3T} \right] [T] = [1 \ 2 \ 3 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= [3 \ 2 \ -1 \ 1] \end{aligned}$$

elde edilir.

Aynı dönüşüm  $\vec{L}_2^{3T} = [L_2 \ L_3 \ L_4 \ 1] = [3 \ 4 \ 7 \ 1]$  vektörüne denklem (3.82) kullanılarak, uygulanırsa;

$$\begin{aligned} \left[ \vec{L}_2^{3T*} \right] &= \left[ \vec{L}_2^{3T} \right] [T] = [3 \ 4 \ 7 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= [7 \ 4 \ -3 \ 1] \end{aligned}$$

Yeni konum vektörleri  $\left[ \vec{F}_2^{3T*} \right] = [3 \ 2 \ -1 \ 1]$  ve  $\left[ \vec{L}_2^{3T*} \right] = [7 \ 4 \ -3 \ 1]$  aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 3.36. Fibonacci ve Lucas 3-vektörlerinde dönme

### 3.3.4. Fibonacci ve Lucas 3-Vektörlerinde Yansıma

$\vec{F}_n^{3T} = [F_n \ F_{n+1} \ F_{n+2}]$ , Fibonacci 3-vektörüne ve  $\vec{L}_n^{3T} = [L_n \ L_{n+1} \ L_{n+2}]$  Lucas 3-vektörüne yansıma dönüşümlerini uygulayalım;

Böylece, xy düzlemi boyunca bir yansıma için dönüşüm matrisi, denklem (3.58) kullanılarak;

$$[T_{xy}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Fibonacci ve Lucas 3-vektörlerinin xy düzlemi boyunca yansıması,

$$\begin{aligned} [\vec{F}_n^{3T}][T] &= [F_n \ F_{n+1} \ F_{n+2} \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= [F_n \ F_{n+1} \ -F_{n+2} \ 1] \end{aligned} \quad (3.83)$$

ve

$$\begin{aligned}
[\vec{L}_n^{3T}][T] &= [L_n \quad L_{n+1} \quad L_{n+2} \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= [L_n \quad L_{n+1} \quad -L_{n+2} \quad 1]
\end{aligned} \tag{3.84}$$

olur.  $yz$  düzleminde yansıması için, denklem (3.56) kullanılarak;

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dönüşümü kullanılır. Fibonacci ve Lucas 3-vektörlerinin  $yz$  düzlemi boyunca yansıması,

$$\begin{aligned}
[\vec{F}_n^{3T}][T] &= [F_n \quad F_{n+1} \quad F_{n+2} \quad 1] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= [-F_n \quad F_{n+1} \quad F_{n+2} \quad 1]
\end{aligned} \tag{3.85}$$

ve

$$\begin{aligned}
[\vec{L}_n^{3T}][T] &= [L_n \quad L_{n+1} \quad L_{n+2} \quad 1] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= [-L_n \quad L_{n+1} \quad L_{n+2} \quad 1]
\end{aligned} \tag{3.86}$$

ve  $xz$  düzleminde yansıması için, denklem (3.57) kullanılarak;

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

kullanılır. Fibonacci ve Lucas 3-vektörlerinin  $xz$  düzlemi boyunca yansımaları,

$$\begin{aligned} [\vec{F}_n^{3T}][T] &= [F_n \quad F_{n+1} \quad F_{n+2} \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= [F_n \quad -F_{n+1} \quad F_{n+2} \quad 1] \end{aligned} \quad (3.87)$$

ve

$$\begin{aligned} [\vec{L}_n^{3T}][T] &= [L_n \quad L_{n+1} \quad L_{n+2} \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= [L_n \quad -L_{n+1} \quad L_{n+2} \quad 1] \end{aligned} \quad (3.88)$$

olur.

### Örnek 3.3.4.1. Fibonacci ve Lucas 3-Vektörlerinde Yansımalar

$\vec{F}_3^{3T}$  Fibonacci 3-vektörünü ve  $\vec{L}_3^{3T}$  Lucas 3-vektörünü göz önünde bulunduralım.  $[\vec{F}_3^{3T}]$

ve  $[\vec{L}_3^{3T}]$  konum vektörünün matrisi;

$$\vec{F}_3^{3T} = [F_3 \quad F_4 \quad F_5 \quad 1] = [2 \quad 3 \quad 5 \quad 1]$$

$$\vec{L}_3^{3T} = [L_3 \quad L_4 \quad L_5 \quad 1] = [4 \quad 7 \quad 11 \quad 1]$$

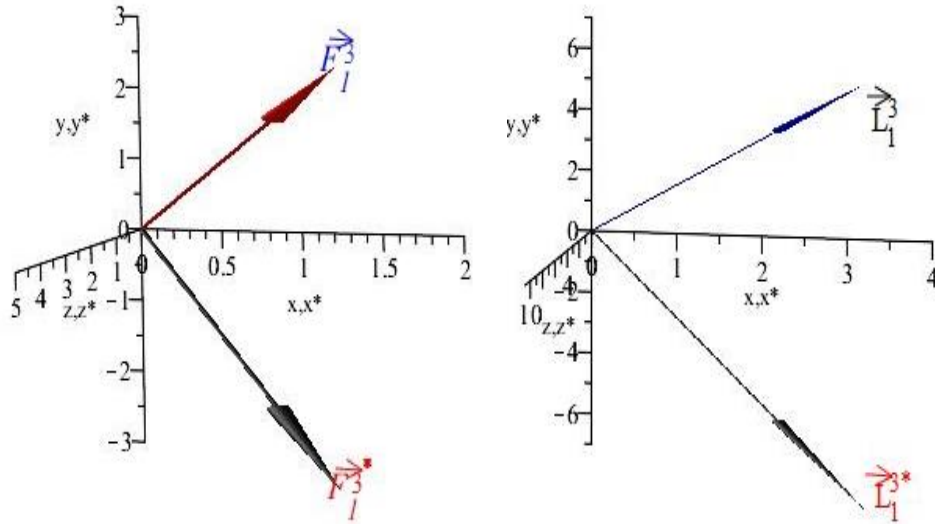
ile verilir.  $xz$  düzlemi boyunca yansımadan sonra denklem (3.87) ve denklem (3.88)'den dönüştürülmüş konum vektörleri

$$\begin{aligned} [\vec{F}_3^{3T*}] &= [\vec{F}_3^{3T}] [T] = [2 \ 3 \ 5 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= [2 \ -3 \ 5 \ 1] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} [\vec{L}_3^{3T*}] &= [\vec{L}_3^{3T}] [T] = [4 \ 7 \ 11 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= [4 \ -7 \ 11 \ 1] \end{aligned}$$

olur. Sonuçta elde edilen  $[\vec{F}_3^{3T*}] = [2 \ -3 \ 5 \ 1]$  ve  $[\vec{L}_3^{3T*}] = [4 \ -7 \ 11 \ 1]$  vektörleri aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 3.37. Fibonacci ve Lucas 3-vektörlerinde yansıma

### 3.3.5. Fibonacci ve Lucas 3-Vektörlerinde Öteleme

$\vec{F}_n^{3T} = [F_n \ F_{n+1} \ F_{n+2}]$  Fibonacci 3-vektörünün ve  $\vec{L}_n^{3T} = [L_n \ L_{n+1} \ L_{n+2}]$  Lucas 3-vektörünün üç boyutlu öteleme matrisi

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & m & n & 1 \end{bmatrix}$$

ile verilir.  $\vec{F}_3^{3T}$  Fibonacci 3-vektörüne ve  $\vec{L}_3^{3T}$  Lucas 3-vektörüne öteleme matrisi uygulandığında, denklem (3.59) kullanılarak;

$$[F'_n \ F'_{n+1} \ F'_{n+2} \ h] = [F_n \ F_{n+1} \ F_{n+2} \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & m & n & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$[L'_n \ L'_{n+1} \ L'_{n+2} \ h] = [L_n \ L_{n+1} \ L_{n+2} \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & m & n & 1 \end{bmatrix}$$

ötelenmiş homojen koordinatlar elde edilir. Genişletildiğinde;

$$\begin{aligned} [F'_n \ F'_{n+1} \ F'_{n+2} \ h] &= [F_n + l \ F_{n+1} + m \ F_{n+2} + n \ 1] \\ [L'_n \ L'_{n+1} \ L'_{n+2} \ h] &= [L_n + l \ L_{n+1} + m \ L_{n+2} + n \ 1] \end{aligned} \quad (3.89)$$

eşitliği bulunur. Dönüştürülen fiziksel koordinatlar ise

$$\begin{aligned}
F'_n &= F_n + l & L'_n &= L_n + l \\
F'_{n+1} &= F_{n+1} + m & L'_{n+1} &= L_{n+1} + m \\
F'_{n+2} &= F_{n+2} + n & L'_{n+2} &= L_{n+2} + n
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

### Örnek 3.3.5.1. Fibonacci ve Lucas 3-Vektörlerinde Öteleme

$\vec{F}_3^{3T}$  Fibonacci 3-vektörünü ve  $\vec{L}_3^{3T}$  Lucas 3-vektörünü göz önünde bulunduralım.  $\left[ \vec{F}_3^{3T} \right]$  ve  $\left[ \vec{L}_3^{3T} \right]$  konum vektörü

$$\begin{aligned}
\vec{F}_3^{3T} &= [F_3 \quad F_4 \quad F_5 \quad 1] = [2 \quad 3 \quad 5 \quad 1] \\
\vec{L}_3^{3T} &= [L_3 \quad L_4 \quad L_5 \quad 1] = [4 \quad 7 \quad 11 \quad 1]
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Öteleme dönüşümü  $\vec{F}_3^{3T}$  Fibonacci 3-vektörüne ve  $\vec{L}_3^{3T}$  Lucas 3-vektörüne uygulandığında

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Ötelenmiş homojen koordinatlar ise denklem (3.89)'dan,

$$\left[ \vec{F}_3^{3T'} \right] = \left[ \vec{F}_3^{3T} \right] [T] = [2 \quad 3 \quad 5 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [7 \quad 3 \quad 5 \quad 1]$$

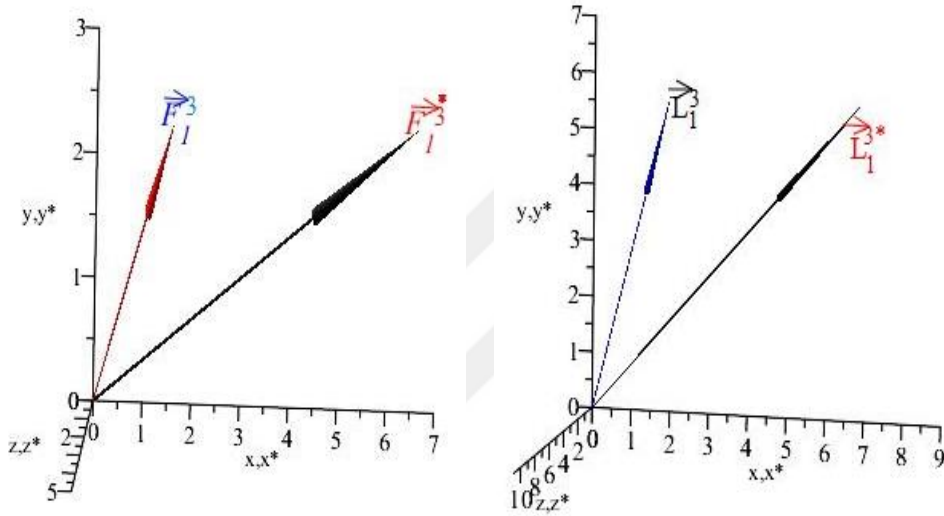
ve

$$\left[ \vec{L}_3^{3T'} \right] = \left[ \vec{L}_3^{3T} \right] [T] = [4 \quad 7 \quad 11 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [9 \quad 7 \quad 11 \quad 1]$$

matris çarpımı ile elde edilir. Sonuçta elde edilen konum vektörleri

$$\begin{aligned} F'_3 &= 7 & L'_3 &= 9 \\ F'_4 &= 3 & L'_4 &= 7 \\ F'_5 &= 5 & L'_5 &= 11 \end{aligned}$$

ile verilir ve aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 3.38. Fibonacci ve Lucas 3-vektörlerinde öteleme

### 3.3.6. Fibonacci ve Lucas 3-Vektörlerinde Çoklu Dönüşümler

Denklem (3.61)'de verilen birleştirilmiş dönüşüm matrisi kullanılırsa; genel bir Fibonacci ve Lucas 3-vektörleri için dönüşüm sonucu

$$\begin{aligned} [\vec{F}_n^{3T}][T] &= [F_n \quad F_{n+1} \quad F_{n+2} \quad 1] \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi \sin \theta & \cos \theta & \cos \phi \sin \theta & 0 \\ \sin \phi \cos \theta & -\sin \theta & \cos \phi \cos \theta & 0 \\ l \cos \phi & m \cos \theta & -l \sin \phi & 1 \\ +m \sin \phi \sin \theta & -n \sin \theta & +m \cos \phi \sin \theta & \\ +n \sin \phi \cos \theta & & +n \cos \phi \cos \theta & \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (F_n + l) \cos \phi & (F_{n+1} + m) \cos \theta & -(F_n + l) \sin \phi & 1 \\ +(F_{n+1} + m) \sin \phi \sin \theta & -(F_{n+2} + n) \sin \theta & +(F_{n+1} + m) \cos \phi \sin \theta & \\ +(F_{n+2} + n) \sin \phi \cos \theta & & +(F_{n+2} + n) \cos \phi \cos \theta & \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.90)$$

ve

$$\begin{aligned}
 [\vec{L}_n^{3T}][T] &= [L_n \quad L_{n+1} \quad L_{n+2} \quad 1] \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi \sin \theta & \cos \theta & \cos \phi \sin \theta & 0 \\ \sin \phi \cos \theta & -\sin \theta & \cos \phi \cos \theta & 0 \\ l \cos \phi & m \cos \theta & -l \sin \phi & 1 \\ +m \sin \phi \sin \theta & -n \sin \theta & +m \cos \phi \sin \theta & \\ +n \sin \phi \cos \theta & & +n \cos \phi \cos \theta & \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (L_n + l) \cos \phi & (L_{n+1} + m) \cos \theta & -(L_n + l) \sin \phi & 1 \\ +(L_{n+1} + m) \sin \phi \sin \theta & -(L_{n+2} + n) \sin \theta & +(L_{n+1} + m) \cos \phi \sin \theta & \\ +(L_{n+2} + n) \sin \phi \cos \theta & & +(L_{n+2} + n) \cos \phi \cos \theta & \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.91}$$

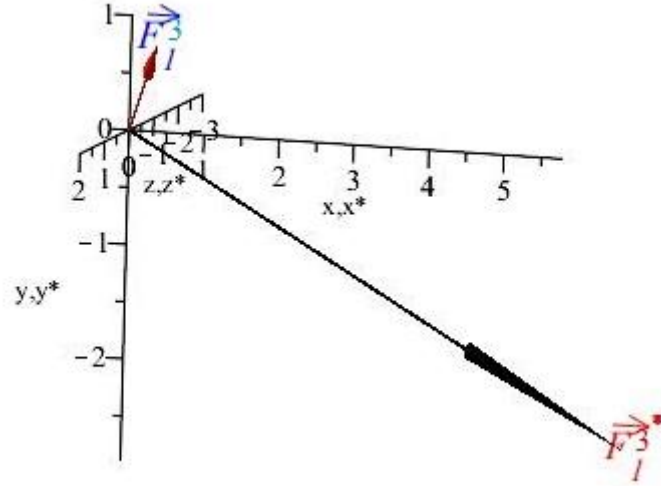
olarak elde edilir. Aşağıdaki örnek açıkça bu kavramı göstermektedir.

### Örnek 3.3.6.1. Fibonacci 3-Vektöründe Çoklu Dönüşümler

$\vec{F}_1 = [F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad 1] = [1 \quad 1 \quad 2 \quad 1]$  ile tanımlı olan  $\vec{F}_1$  Fibonacci 3-vektörü önce  $x, y, z$  yönleri doğrultusunda  $+2, +2, +2$  birim ötelenip, ardından sırasıyla art arda  $x$ -ekseni etrafında bir  $+60^\circ$ 'lik ve  $y$ -ekseni etrafında bir  $+90^\circ$ 'lik dönme dönüşümleri uygulandığında başka bir deyişle denklem (3.90)'dan,  $\theta = +60^\circ, \phi = +90^\circ, l = +2, m = +2, n = +2$  değerleri alınarak uygulandığında

$$\begin{aligned}
 [\vec{F}_1][T] &= [1 \quad 1 \quad 2 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1.155 & 0.577 & 0 & 0 \\ 0.577 & -1.155 & 0 & 0 \\ 3.464 & -1.155 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\
 [\vec{F}_1][T] &= [5.773 \quad -2.888 \quad -3 \quad 1]
 \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 3.39. Fibonacci 3-vektöründe çoklu dönüşümler

### 3.4. Fibonacci ve Lucas Vektörleri İçin Householder Dönüşümü ve MAPLE Uygulamaları

Tezin bu kısmında, Fibonacci ve Lucas sayı vektörleri için Householder dönüşümünün nasıl tanımlanacağı incelenmiştir.  $\vec{F}_{n_1}^m$  ve  $\vec{F}_{n_2}^m$ , m-boyutlu Fibonacci vektörleri olsun,  $\vec{F}_{n_1}^m$  vektörünün  $\vec{F}_{n_2}^m$  vektörü üzerine dik izdüşüm vektörü bulunmuştur.  $\vec{L}_{n_1}^m$  vektörünün  $\vec{L}_{n_2}^m$  vektörü üzerine dik izdüşüm vektörü bulunmuştur. Bu yansıma dönüşümlerine karşılık gelen matrisler elde edilmiş; yansıma özellikleri açısından irdelendikten sonra Fibonacci ve Lucas vektörlerinin iç çarpım tanımlarından yararlanarak m tamsayısının çift veya tek olma durumuna göre m-boyutlu Fibonacci ve Lucas vektörleri için Householder dönüşümü elde edilmiştir.

Öncelikle, materyal ve yöntem kısmında Fibonacci ve Lucas sayılarının bazı özellikleri verilmiştir; daha sonra Fibonacci ve Lucas 3-vektörlerinin özellikleri, bu vektörler arasındaki iç çarpım ve vektörel çarpım verilmiş ve bu uzayda tanımlı bir Fibonacci ve Lucas 3- vektörlerinde Householder dönüşümü ile bu dönüşüme karşılık gelen matris elde edilmiştir.

#### 3.4.1. m-Boyutlu Fibonacci Vektörleri için Householder Dönüşümü

$\vec{F}_{n_1}^m$  ve  $\vec{F}_{n_2}^m$ , m-boyutlu Fibonacci vektörleri  $\vec{F}_{n_1}^{mT} = [F_{n_1} \ F_{n_1+1} \ \dots \ F_{n_1+m-1}]$  ve  $\vec{F}_{n_2}^{mT} = [F_{n_2} \ F_{n_2+1} \ \dots \ F_{n_2+m-1}]$  olarak verilsin.  $\vec{F}_{n_1}^m$  vektörünün  $\vec{F}_{n_2}^m$  vektörü üzerine dik izdüşüm vektörü

$$izd_{\vec{F}_{n_2}^m}(\vec{F}_{n_1}^m) = \frac{\langle \vec{F}_{n_1}^m, \vec{F}_{n_2}^m \rangle}{\langle \vec{F}_{n_2}^m, \vec{F}_{n_2}^m \rangle} \vec{F}_{n_2}^m$$

ile verilir.  $\vec{F}_{n_1}^m$  vektörünün  $\vec{F}_{n_2}^m$  vektörü üzerine yansımısını sağlayan Householder dönüşümü

$$\mathcal{H}(\vec{F}_{n_1}^m) = \vec{F}_{n_1}^m - 2 \frac{\langle \vec{F}_{n_1}^m, \vec{F}_{n_2}^m \rangle}{\langle \vec{F}_{n_2}^m, \vec{F}_{n_2}^m \rangle} \vec{F}_{n_2}^m \quad (3.92)$$

denklemleri ile tanımlanır. Öklid iç çarpımın özelliklerinden yararlanarak Householder dönüşümü

$$\mathcal{H}(\vec{F}_{n_1}^m) = \vec{F}_{n_1}^m - 2 \frac{F_{n_1} F_{n_2} + F_{n_1+1} F_{n_2+1} + \dots + F_{n_1+n_2+m-1} F_{n_1+n_2+m-1}}{F_{n_2}^2 + F_{n_2+1}^2 + \dots + F_{2n_2+m-1}^2} \vec{F}_{n_2}^m$$

olarak yazılabilir. Tanım 2.16.5'deki Fibonacci vektörlerinin iç çarpım tanımlarından yararlanarak  $m$  tamsayısının çift veya tek olma durumuna göre Householder dönüşümünün denklem (3.92)'den alternatif gösterimleri şu şekilde elde edilebilir:

$m$  tamsayısı çift ise

$$\mathcal{H}(\vec{F}_{n_1}^m) = \vec{F}_{n_1}^m - 2 \frac{F_m F_{n_1+n_2+m-1}}{F_m F_{2n_2+m-1}} \vec{F}_{n_2}^m = \vec{F}_{n_1}^m - 2 \frac{F_{n_1+n_2+m-1}}{F_{2n_2+m-1}} \vec{F}_{n_2}^m \quad (3.93)$$

$m$  tek ise

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\vec{F}_{n_1}^m) &= \vec{F}_{n_1}^m - 2 \frac{\frac{1}{5} (L_m L_{n_1+n_2+m-1} - (-1)^{n_1} L_{n_2-n_1})}{\frac{1}{5} (L_m L_{2n_2+m-1} - 2(-1)^{n_2})} \vec{F}_{n_2}^m \\ &= \vec{F}_{n_1}^m - 2 \frac{L_m L_{n_1+n_2+m-1} - (-1)^{n_1} L_{n_2-n_1}}{\frac{1}{5} (L_m L_{2n_2+m-1} - 2(-1)^{n_2})} \vec{F}_{n_2}^m \end{aligned} \quad (3.94)$$

olarak Householder dönüşümleri elde edilir.  $\vec{F}_{n_1}^m$  vektörünün  $\vec{F}_{n_2}^m$  vektörü üzerine yansımısını sağlayan Householder dönüşümü

$$\mathcal{H} = I - 2 \frac{\vec{F}_{n_2}^m \vec{F}_{n_2}^{mT}}{\vec{F}_{n_2}^{mT} \vec{F}_{n_2}^m} \quad (3.95)$$

ile bulunur. Özel olarak, denklem (3.94) kullanılarak; Fibonacci vektörleri Öklid 3-uzayında alındığında yani  $m = 3$  alındığında Householder dönüşümü

$$\mathcal{H}(\vec{F}_{n_1}^3) = \vec{F}_{n_1}^3 - 2 \frac{L_3 L_{n_1+n_2+2} - (-1)^{n_1} L_{n_2-n_1}}{L_3 L_{2n_2+2} - 2(-1)^{n_2}} \vec{F}_{n_2}^3$$

denklem (3.95)'den bu dönüşüme karşılık gelen Householder matrisi de

$$\mathcal{H} = I - 2 \frac{\vec{F}_{n_2}^3 \vec{F}_{n_2}^{3T}}{\vec{F}_{n_2}^{3T} \vec{F}_{n_2}^3} \quad (3.96)$$

olarak elde edilir.

### 3.4.2. m-Boyutlu Lucas Vektörleri için Householder Dönüşümü

$\vec{L}_{n_1}^m$  ve  $\vec{L}_{n_2}^m$ , m-boyutlu Lucas vektörleri  $\vec{L}_{n_1}^{mT} = [L_{n_1} \ L_{n_1+1} \ \dots \ L_{n_1+m-1}]$  ve  $\vec{L}_{n_2}^{mT} = [L_{n_2} \ L_{n_2+1} \ \dots \ L_{n_2+m-1}]$  olarak verilsin.  $\vec{L}_{n_1}^m$  vektörünün  $\vec{L}_{n_2}^m$  vektörü üzerine dik izdüşüm vektörü

$$izd_{\vec{L}_{n_2}^m}(\vec{L}_{n_1}^m) = \frac{\langle \vec{L}_{n_1}^m, \vec{L}_{n_2}^m \rangle}{\langle \vec{L}_{n_2}^m, \vec{L}_{n_2}^m \rangle} \vec{L}_{n_2}^m$$

ile verilir.  $\vec{L}_{n_1}^m$  vektörünün  $\vec{L}_{n_2}^m$  vektörü üzerine yansımısını sağlayan Householder dönüşümü

$$\mathcal{H}(\vec{L}_{n_1}^m) = \vec{L}_{n_1}^m - 2 \frac{\langle \vec{L}_{n_1}^m, \vec{L}_{n_2}^m \rangle}{\langle \vec{L}_{n_2}^m, \vec{L}_{n_2}^m \rangle} \vec{L}_{n_2}^m \quad (3.97)$$

denklemleri ile tanımlanır. Öklid iç çarpımın özelliklerinden yararlanarak Householder dönüşümü

$$\mathcal{H}(\vec{L}_{n_1}^m) = \vec{L}_{n_1}^m - 2 \frac{L_{n_1} L_{n_2} + L_{n_1+1} L_{n_2+1} + \dots + L_{n_1+n_2+m-1} L_{n_1+n_2+m-1}}{L_{n_2}^2 + L_{n_2+1}^2 + \dots + L_{n_2+m-1}^2} \vec{L}_{n_2}^m$$

olarak yazılabilir. Tanım 2.16.5'deki Lucas vektörlerinin iç çarpım tanımlarından yararlanarak  $m$  tamsayısının çift veya tek olma durumuna göre Householder dönüşümünün denklem (3.97)'den alternatif gösterimleri şu şekilde elde edilebilir:

$m$  tamsayısı çift ise

$$\mathcal{H}(\vec{L}_{n_1}^m) = \vec{L}_{n_1}^m - 2 \frac{5F_m F_{n_1+n_2+m-1}}{5F_m F_{2n_2+m-1}} \vec{L}_{n_2}^m = \vec{L}_{n_1}^m - 2 \frac{F_{n_1+n_2+m-1}}{F_{2n_2+m-1}} \vec{L}_{n_2}^m \quad (3.98)$$

$m$  tek ise

$$\mathcal{H}(\vec{L}_{n_1}^m) = \vec{L}_{n_1}^m - 2 \frac{L_m L_{n_1+n_2+m-1}}{L_m L_{2n_2+m-1}} \vec{L}_{n_2}^m = \vec{L}_{n_1}^m - 2 \frac{L_{n_1+n_2+m-1}}{L_{2n_2+m-1}} \vec{L}_{n_2}^m \quad (3.99)$$

olarak Householder dönüşümleri elde edilir.  $\vec{L}_{n_1}^m$  vektörünün  $\vec{L}_{n_2}^m$  vektörü üzerine yansımaları sağlayan Householder dönüşümüne karşılık gelen matris

$$\mathcal{H} = I - 2 \frac{\vec{L}_{n_2}^m \vec{L}_{n_2}^{mT}}{\vec{L}_{n_2}^{mT} \vec{L}_{n_2}^m} \quad (3.100)$$

ile bulunur. Özel olarak Lucas vektörleri Öklid 3-uzayında alındığında yani  $m=3$  alındığında Householder dönüşümü denklem (3.99)'dan,

$$\mathcal{H}(\vec{L}_{n_1}^3) = \vec{L}_{n_1}^3 - 2 \frac{L_{n_1+n_2+2}}{L_{2n+2}} \vec{L}_{n_2}^3$$

olarak elde edilir. Bu dönüşüme karşılık gelen Householder matrisi de

$$\mathcal{H} = I - 2 \frac{\vec{L}_{n_2}^3 \vec{L}_{n_2}^{3T}}{\vec{L}_{n_2}^{3T} \vec{L}_{n_2}^3} \quad (3.101)$$

denklemden hesaplanır.

### 3.4.3. m-Boyutlu Fibonacci Vektörü ve Lucas Vektörü için Householder Dönüşümü

$\vec{F}_{n_1}^m$  m-boyutlu Fibonacci vektörü ve  $\vec{L}_{n_2}^m$  m-boyutlu Lucas vektörü olsun.  $\vec{F}_{n_1}^{mT} = [F_{n_1} \ F_{n_1+1} \ \dots \ F_{n_1+m-1}]$  ve  $\vec{L}_{n_2}^{mT} = [L_{n_2} \ L_{n_2+1} \ \dots \ L_{n_2+m-1}]$  olarak verilsin.  $\vec{F}_{n_1}^m$  vektörünün  $\vec{L}_{n_2}^m$  vektörü üzerine dik izdüşüm vektörü

$$izd_{\vec{L}_{n_2}^m}(\vec{F}_{n_1}^m) = \frac{\langle \vec{F}_{n_1}^m, \vec{L}_{n_2}^m \rangle}{\langle \vec{L}_{n_2}^m, \vec{L}_{n_2}^m \rangle} \vec{L}_{n_2}^m$$

ile verilir.  $\vec{F}_{n_1}^m$  vektörünün  $\vec{L}_{n_2}^m$  vektörü üzerine yansımaları sağlayan Householder dönüşümü

$$\mathcal{H}(\vec{F}_{n_1}^m) = \vec{F}_{n_1}^m - 2 \frac{\langle \vec{F}_{n_1}^m, \vec{L}_{n_2}^m \rangle}{\langle \vec{L}_{n_2}^m, \vec{L}_{n_2}^m \rangle} \vec{L}_{n_2}^m$$

denklemleri ile tanımlanır. Öklid iç çarpımın özelliklerinden yararlanarak Householder dönüşümü

$$\mathcal{H}(\vec{F}_{n_1}^m) = \vec{F}_{n_1}^m - 2 \frac{F_{n_1} L_{n_2} + F_{n_1+1} L_{n_2+1} + \dots + F_{n_1+n_2+m-1} L_{n_1+n_2+m-1}}{L_{n_2}^2 + L_{n_2+1}^2 + \dots + L_{2n_2+m-1}^2} \vec{L}_{n_2}^m$$

olarak yazılabilir. Tanım 2.16.5'deki Fibonacci vektörlerinin iç çarpım tanımlarından yararlanarak  $m$  tamsayısının çift veya tek olma durumuna göre Householder dönüşümünün alternatif gösterimleri şu şekilde elde edilebilir:

$m$  tamsayısı çift ise

$$\mathcal{H}(\vec{F}_{n_1}^m) = \vec{F}_{n_1}^m - 2 \frac{5F_m L_{n_1+n_2+m-1}}{5F_m F_{2n_2+m-1}} \vec{L}_{n_2}^m = \vec{F}_{n_1}^m - 2 \frac{L_{n_1+n_2+m-1}}{F_{2n_2+m-1}} \vec{L}_{n_2}^m$$

$m$  tek ise

$$\mathcal{H}(\vec{F}_{n_1}^m) = \vec{F}_{n_1}^m - 2 \frac{L_m F_{n_1+n_2+m-1} + (-1)^{n_1+1} F_{n_2-n_1}}{L_m L_{2n+m-1}} \vec{L}_{n_2}^m$$

olarak Householder dönüşümleri elde edilir.  $\vec{F}_{n_1}^m$  vektörünün  $\vec{L}_{n_2}^m$  vektörü üzerine yansımısını sağlayan Householder dönüşümüne karşılık gelen matris

$$\mathcal{H} = I - 2 \frac{\vec{L}_{n_2}^m \vec{L}_{n_2}^{mT}}{\vec{L}_{n_2}^{mT} \vec{L}_{n_2}^m}$$

ile bulunur. Özel olarak Fibonacci ve Lucas vektörleri Öklid 3-uzayında alındığında yani  $m = 3$  alındığında Householder dönüşümü

$$\mathcal{H}(\vec{F}_{n_1}^3) = \vec{F}_{n_1}^3 - 2 \frac{L_3 F_{n_1+n_2+2} + (-1)^{n_1+1} F_{n_2-n_1}}{L_3 L_{2n+2}} \vec{L}_{n_2}^3$$

olarak elde edilir. Bu dönüşüme karşılık gelen Householder matrisi de

$$\mathcal{H} = I - 2 \frac{\vec{L}_{n_2}^3 \vec{L}_{n_2}^{3T}}{\vec{L}_{n_2}^{3T} \vec{L}_{n_2}^3}$$

denkleminde hesaplanır.

### Örnek 3.4.3.1. Fibonacci 3-Vektörlerinde Householder Dönüşümü

Öklid 3-uzayında  $\vec{F}_2^{3T} = [F_2 \ F_3 \ F_4] = [1 \ 2 \ 3]$  Fibonacci 3-vektörünün,  $x + y + 2z = 0$  düzlemine göre simetriği olan vektörü bulmak için, Householder dönüşümü uygulanabilir.  $\vec{F}_2^3$  vektörünün  $x + y + 2z = 0$  düzlemine göre simetriği olan vektörün bulunabilmesi için düzleme ortogonal bir vektör bulunması gereklidir; bu vektör  $\vec{F}_1^{3T} = [1 \ 1 \ 2]$  şeklindeki düzlemin normali seçilebilir. Böylece, Householder matrisi de denklem (3.96)'dan,

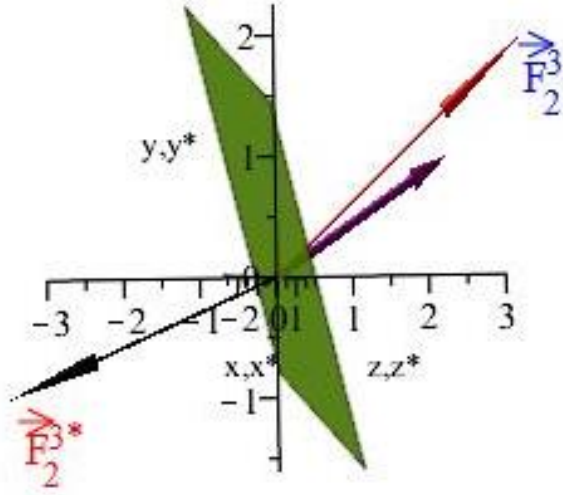
$$\mathcal{H}(\vec{F}_2^3) = I - 2 \frac{\vec{F}_2^3 \vec{F}_2^{3T}}{\vec{F}_2^{3T} \vec{F}_2^3} = I - 2 \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} [1 \ 1 \ 2]}{[1 \ 1 \ 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

$$\mathcal{H}(\vec{F}_2^3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

elde edilir ki, ortogonal, simetrik ve dolayısıyla tersi kendisine eşit bir matris olduğu kolayca görülebilir. Böylece,

$$\mathcal{H}(\vec{F}_2^3) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

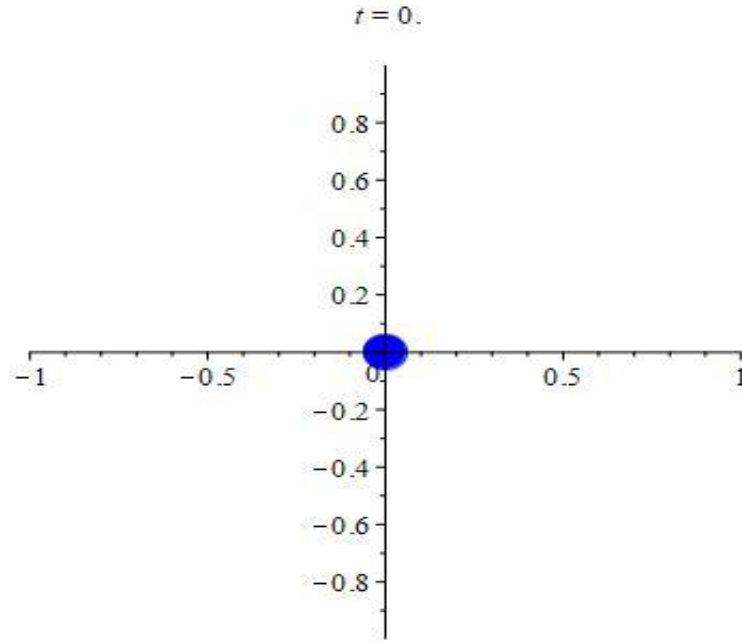
olarak elde edilir. Sonuç aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 3.40. Fibonacci 3-vektöründe Householder dönüşümü

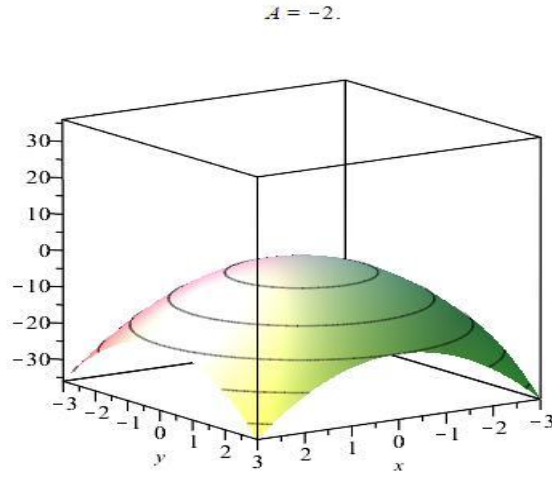
### 3.5. Dönüşümlerle ilgili Animasyon İçerikli MAPLE Uygulamaları

Örnek 3.5.1. Öteleme (animasyon) Maple uygulaması ve şekli aşağıda verilmiştir.



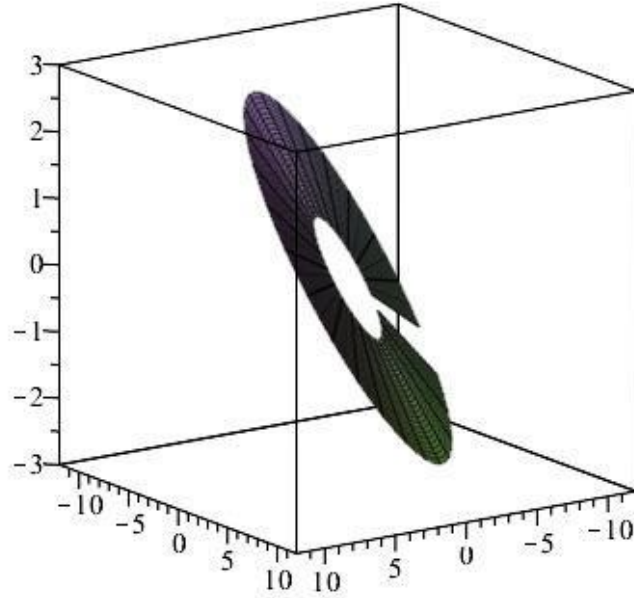
Şekil 3.41. Öteleme animasyonu (top)

**Örnek 3.5.2.** Öteleleme (animasyon) Maple uygulaması ve şekli aşağıda verilmiştir.



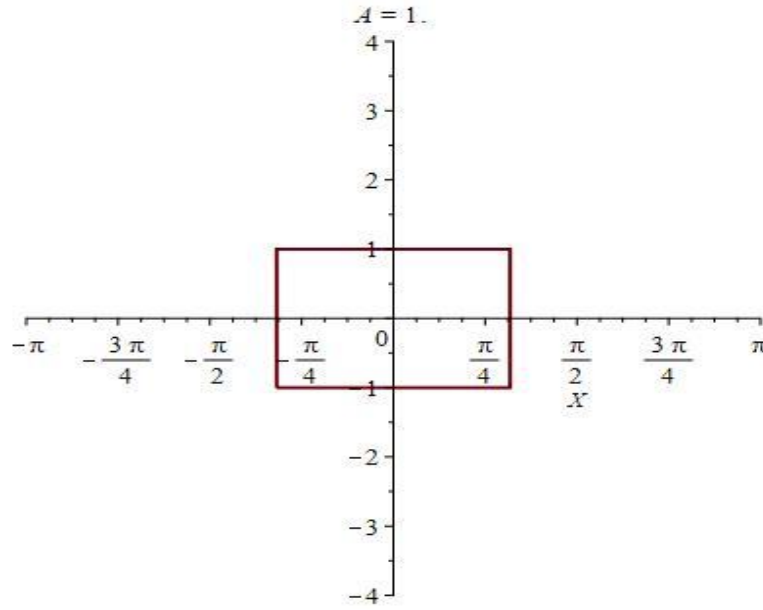
**Şekil 3.42.** Öteleme animasyonu (eğri)

**Örnek 3.5.3.** Dönme (animasyon) Maple uygulaması ve şekli aşağıda verilmiştir [11].



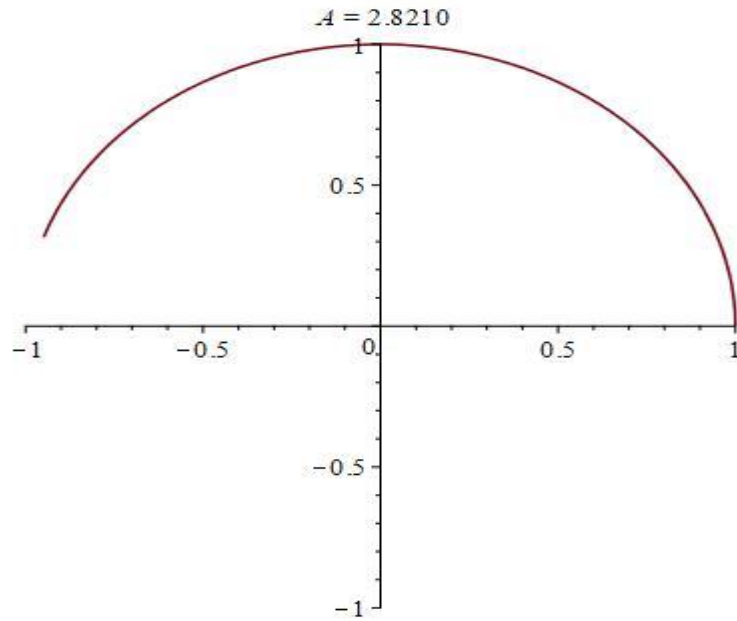
**Şekil 3.43.** Dönme animasyonu (eğri)

**Örnek 3.5.4.** Ölçeklendirme (animasyon) Maple uygulaması ve şekli aşağıda verilmiştir.



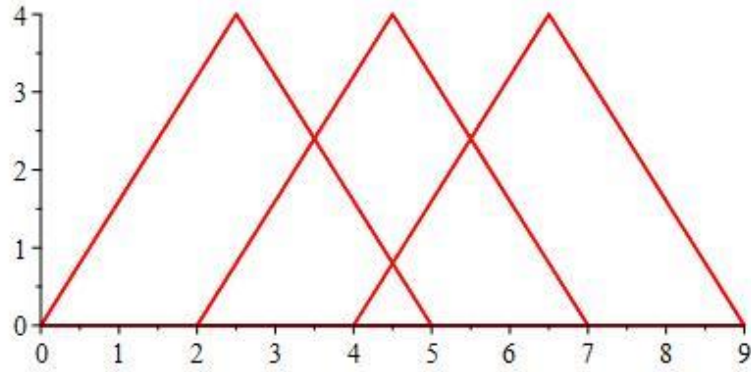
**Şekil 3.44.** Ölçeklendirme animasyonu

**Örnek 3.5.5.** Öteleme (animasyon) Maple uygulaması ve şekli aşağıda verilmiştir.



**Şekil 3.45.** Öteleme animasyonu (çember)

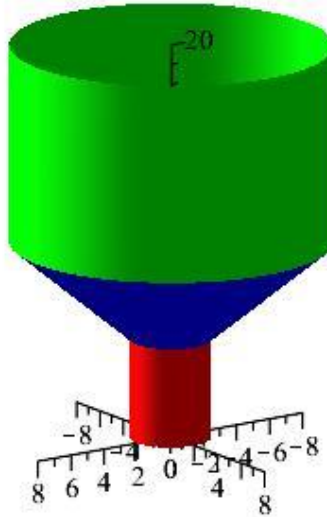
**Örnek 3.5.6.** Öteleme (animasyon) Maple uygulaması ve şekli aşağıda verilmiştir.



**Şekil 3.46.** Öteleme animasyonu (üçgenler)

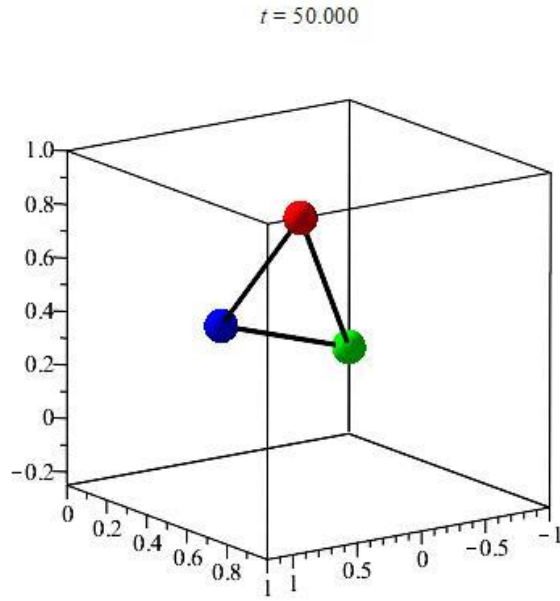
**Örnek 3.5.7.** Öteleme (animasyon) Maple uygulaması ve şekli aşağıda verilmiştir.

$$\alpha = 20.000$$



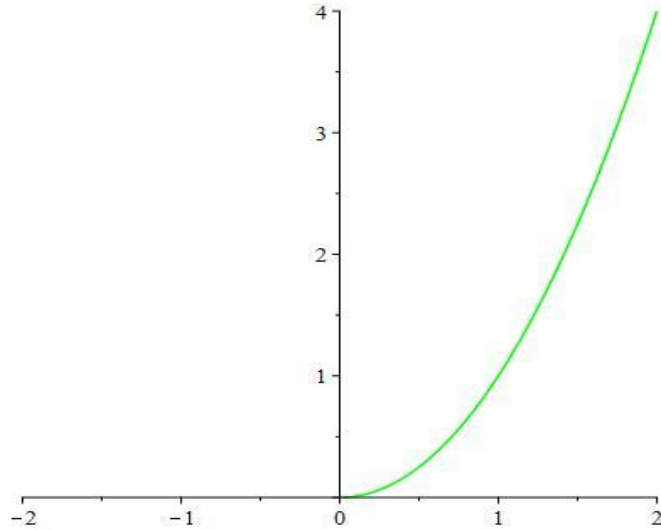
**Şekil 3.47.** Öteleme animasyonu

**Örnek 3.5.8.** Öteleme (animasyon) Maple uygulaması ve şekli aşağıda verilmiştir.



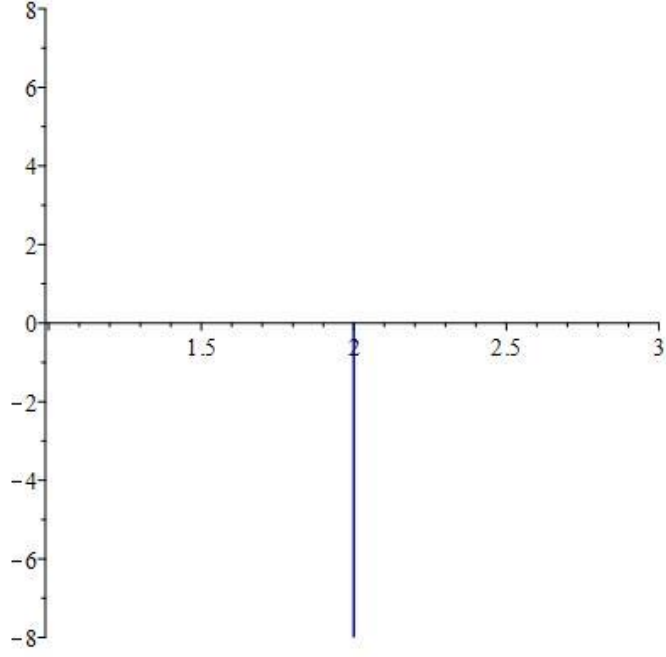
**Şekil 3.48.** Öteleme animasyonu (üçgen)

**Örnek 3.5.9.** x-eksenine göre simetri (animasyon) Maple uygulaması ve şekli aşağıda verilmiştir [22].



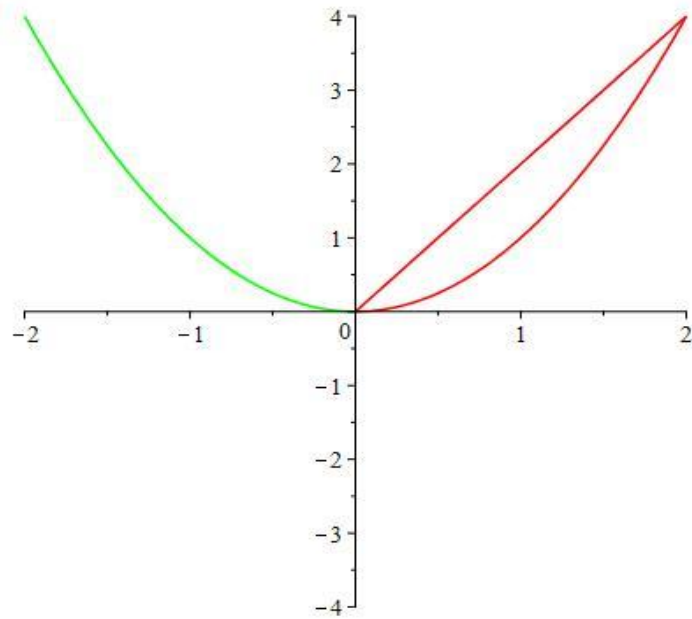
**Şekil 3.49.** x-eksenine göre simetri animasyonu

**Örnek 3.5.10.** y-eksenine göre simetri (animasyon) Maple uygulaması ve şekli aşağıda verilmiştir [22].



**Şekil 3.50.** y-eksenine göre simetri animasyonu

**Örnek 3.5.11.** Orijine göre simetri (animasyon) Maple uygulaması ve şekli aşağıda verilmiştir [22].



**Şekil 3.51.** Orijine göre simetri animasyonu

#### 4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Tez çalışmasında ilk olarak iki boyutlu uzaydaki, meyillenme, ölçeklendirme, dönme, yansıma, öteleme dönüşümlerinin matris olarak ifadeleri ve örnekleri verilmiştir. Homojen koordinatlarda öteleme, dönme, yansıma, tümten ölçeklendirme dönüşümlerinin örneklendirmeleri yapılmıştır. Üç boyutlu uzaydaki meyillenme, yerel ölçeklendirme, dönme, yansıma, öteleme ve genel ölçeklendirme dönüşümlerinin matris kombinasyonları ifade edilmiş ve örneklendirmeleri yapılmıştır. Dönüşümlerle ilgili Maple programında animasyon örnekleri verilmiştir. Fibonacci ve Lucas sayıları, Fibonacci ve Lucas vektörleri özellikleri, Householder dönüşümü ve temel bilgileri verilmiştir. Tezimizin orijinal kısmında; dönüşüm örneklerinin Maple programında uygulamaları yapılmış ve şekilleri çizilmiştir. Dönüşümlerin Öklid uzayında olduğu gibi Fibonacci ve Lucas 3-vektörlerindeki uygulamaları incelenmiştir. Fibonacci ve Lucas 3-vektörlerinde ölçeklendirme, dönme, yansıma, öteleme, meyillenme, birleşik dönüşümlerin matrisleri ifade edilmiş ve her dönüşümle ilgili örnek verilmiştir. Yine Fibonacci ve Lucas 3-vektörlerinin dönüşümlerinin şekilleri Maple programında çizilmiştir.  $m$ -boyutlu Fibonacci ve Lucas vektörleri için Householder dönüşümü tanımlandıktan sonra daha özel hali olan Fibonacci ve Lucas 3-vektörleri için Householder dönüşümü tanımlanmış, örnekleri ve Maple programında uygulamaları yapılmıştır. Bu çalışmanın konusu dönüşümler farklı sayı sistemlerinde incelenebilir. Householder dönüşümü farklı uzay ve sayı sistemlerine uygulanabilir. Araştırılan farklı konuların Maple programında uygulamaları yapılabilir. Böylece yapılan araştırmalar çağımıza uygun olarak bilgisayar destekli tasarım ile daha fazla bütünleştirilerek; somutlaştırılır. Çalışmamızın ileride hem geometri hem de farklı bilim dallarında dönüşümler ve bilgisayar destekli tasarım ile ilgili yapılacak bilimsel çalışmalara yol gösterici olacağına inanıyoruz.

## 5. KAYNAKLAR

- [1] Hacısalihoğlu HH, 1976. Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometrilere. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları. Ankara.
- [2] Farin G, 1996. Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design. Arizona State University, USA.
- [3] Fox L, 1964. An Introduction to Numerical Linear Algebra. Oxford University Press, London.
- [4] Gallier J, 1999. Curves and Surfaces in Geometric Modeling, Theory and Algorithms. Morgan Kaufman, USA.
- [5] Marsh D, 2005. Applied Geometry for Computer Graphics and CAD. Springer-Verlag, London Berlin Heidelberg.
- [6] Adams JA, Rogers DF, 1990. Mathematical Elements for Computer Graphics. McGraw Hill, USA.
- [7] Anand VB, 1992. Computer Graphics and Geometric Modeling for Engineers. John Wiley & Sons. Inc.
- [8] Forrest AR, Coordinates, Transformations and Visualization Techniques. CAD Group Document No. 23, Cambridge University, June 1969.
- [9] Salomon D, 2006. Curves and Surfaces for Computer Graphics. Springer. USA. 0-387-28452-4.
- [10] Yamaguchi F, 1988. Curves and Surfaces in Computer Aided Geometric Design. Springer-Verlag, New York.
- [11] Çelik B, 2004. Maple ve Maple ile Matematik. Nobel Yayınları. Ankara.
- [12] Özdemir M, 2020. Kuaterniyonlar ve Geometri. Altın Nokta Yayınları. İzmir.
- [13] Soylu D, 2019. Householder Dönüşümü ve Bazı Geometrik Uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Antalya.
- [14] Salter E, 2005. Fibonacci Vectors. Graduate Theses and Dissertations, University of South Florida, USA.
- [15] Çetinberk K, 2017. Fibonacci Vektörlerin Öklid, Kompleks ve Lorentz Geometrisi. Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [16] Çetinberk K, Yüce S, 2020. On Fibonacci Vectors. Hagia Sophia Journal of Geometry, 2 (2) , s:12-25.
- [17] Yaşar F, 2016. Fibonacci Sayı Türleri ve Kuaterniyonlarda Kullanımı. Yüksek Lisans Tezi, Gaziantep Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Gaziantep.

- [18] Özdemir M, 2017. Analitik Geometri ve Çözümlü Problemler. Altın Nokta Yayınevi. İzmir.
- [19] Yüce S, 2020. Analitik Geometri. Pegem Akademi Yayıncılık.
- [20] Sabuncuoğlu A, 2011. Lineer Cebir. Nobel Yayınları. Ankara.
- [21] Yüce S, 2017. Öklid Uzayında Diferansiyel Geometri, Pegem Akademi, Ankara.
- [22] Rovenski V, 2000. Geometry of Curves and Surfaces with Maple. Boston, Birkhauser.
- [23] Atanassov KT, Atanassova V, Shannon AG, Turner JC, 2002. New visual perspectives on Fibonacci numbers, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore.
- [24] Özdemir M, 2016. An Alternative Approach To Elliptical Motion. Adv. Appl. Clifford Algebras, 26: 279-304. (published online August 22, 2015).
- [25] Yüce S, 2015. Lineer Cebir, Pegem Akademi Yayıncılık.
- [26] Güven IA, Nurkan SK, 2015. A new approach to Fibonacci, Lucas numbers and dual vectors. Advances in Applied Clifford Algebras, 25(3), 577-590, <https://doi.org/10.1007/s00006-014-0516-7>.
- [27] Aragón-González G, Aragón JL, Rodríguez-Andrade MA, Verde-Star L, 2009. Reflections, Rotations and Pythagorean Numbers. Adv. appl. Clifford alg., 19: 1-14.
- [28] T. Koshy, Fibonacci and Lucas numbers with applications. A Wiley-Interscience Publication, USA, 2001.
- [29] Kaya O, Önder M, 2018. On Fibonacci and Lucas Vectors and Quaternions. Universal Journal of Applied Mathematics, 6(5), 156-163.