T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ ve FIRAT ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

SİSTEM İMZASI ÜZERİNE BİR İNCELEME

Muhammet HALİSDEMİR

AĞUSTOS 2021

İSTATİSTİK ANA BİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

SİSTEM İMZASI ÜZERİNE BİR İNCELEME

Hazırlayan
Muhammet HALİSDEMİR

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Fahrettin ÖZBEY

Jüri Üyeleri
Doç. Dr. Gökhan GÖKDERE
Doç. Dr. Hamit MİRTAGİOĞLU
Dr. Öğr. Üyesi Fahrettin ÖZBEY

AĞUSTOS 2021

ONAY

Muhammet HALİSDEMİR tarafından hazırlanan "**Sistem İmzası Üzerine Bir İnceleme**" adlı tez çalışması 10/08/2021 tarihinde yapılan sınavla aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile Bitlis Eren Üniversitesi ve Fırat Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Doç. Dr. Gökhan GÖKDERE (Başkan)	____________________
Doç. Dr. Hamit MİRTAGİOĞLU (Üye)	____________________
Dr. Öğr. Üyesi. Fahrettin ÖZBEY (Danışman)	____________________

Bu tezin kabulü, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …/…/…gün ve …/… sayılı kararı ile onaylanmıştır

Prof. Dr. Zeki ARGUNHAN
Enstitü Müdürü

BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI

ETİK BEYANI

Bitlis Eren Üniversitesi ve Fırat Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre hazırlamış olduğum "**Sistem İmzası Üzerine Bir İnceleme**" adlı tezimin özgün bir çalışma olduğunu, tez hazırlanırken tüm aşamalarda bilimsel etik ilkelerine uygun davrandığımı, tez kapsamında sunulan tüm verileri bilimsel etik ilkelerine uygun elde ettiğimi, tezde faydalandığım tüm eserlere atıf yaptığımı ve kaynaklar kısmında bu eserleri gösterdiğimi beyan ederim. 10/08/2021

Muhammet HALİSDEMİR

ÖZET

SİSTEM İMZASI ÜZERİNE BİR İNCELEME

Muhammet HALİSDEMİR

Yüksek Lisans Tezi

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Fahrettin ÖZBEY
Ağustos 2021, 41 sayfa

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde sistem imzasının ve sistem güvenirliliğinin tarihsel gelişimi hakkında bilgiler verildi. İkinci bölümde sistemler tanıtıldı. Sıra istatistikleri, sistem güvenirliliği, sistem imzası, hata zamanı gibi temel kavramlardan bahsedildi. Üçüncü bölümde sistemler ve sistem imzasının tanımları, seri sistem ve paralel sistem hakkında bilgiler ve örnekler verildi. *n*-den *k*-çıkışlı-*F* ve ardışık *n*-den *k*-çıkışlı-*F* sistemlerinin güvenirliklerinin ele alındığı önceki çalışmalara yer verildi.

Anahtar kelimeler: Sistem İmzası, *n*-den *k*-çıkışlı Sistem, Ardışık *n*-den *k*-çıkışlı Sistem, Sistem güvenilirliği, Sıra İstatistikleri.

ABSTRACT

AN INVESTIGATION ON SYSTEM SIGNATURE

Muhammet HALİSDEMİR

Master Thesis

Bitlis Eren University Graduate Education Institute
Department of Statistics
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Fahrettin ÖZBEY
August 2021, 41 pages

This study consists of three sections. In the first section, information about the historical development of system signature and system reliability was given. In the second section, systems are introduced. Basic concepts such as order statistics, system reliability, system signature, error time were mentioned. In the third section, the definitions of systems and system signature, information about serial system and parallel system and examples are given. Previous studies on the reliability of k-out-of-n-F and consecutive k-out-of-n-F systems are included.

Keywords: System Signature, k-out-of-n System, Consecutive k-out-of-n System, System Reliability, Order Statistics.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması sırasında, benden desteğini hiçbir zaman esirgemeyen kıymetli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Fahrettin ÖZBEY'e şükranlarımı ve minnettarlığımı sunarım.

Eğitim ve öğretimimin her anında emeklerini ve desteklerini esirgemeyen aileme, sevdiklerime ve kıymetli hocam Dr. Öğr. Üyesi Nurhan HALİSDEMİR'e teşekkür ederim.

ÖNSÖZ

Sanayi devriminden sonra, özellikle Avrupa başta olmak üzere birçok büyük devletlerin sanayileşme ve büyük fabrikalar kurmasıyla, devletlerarasında ekonomik, siyasal ve askeri anlamında büyük rekabet ortamı başlamıştır. Teknolojik gelişmelerle birlikte üretilen yeni icatlar, ülkelerin hem hızlı gelişmesini sağlamış hem de büyük güç olma hayaline büyük bir olanak sağlamıştır. Özellikle birinci ve ikinci dünya savaşında kullanılan silahlar, uçaklar, tanklar… vb. icatlar devletlerin, ekonomik ve askeri anlamında daha da güçlenmesini sağlamıştır. İşte böyle bir durumda bilim adamları üretilen makinaların, daha güçlü, daha uzun ömürlü olması için birçok çalışma ve inceleme yapmışlardır. Bu aşamada mühendislere ve istatistikçilere büyük bir iş düşmüştür. Örneğin, ikinci dünya savaşında kullanılan savaş uçaklarının saldıra uğramasına rağmen geri dönen uçakları inceleyen bilim adamları, daha az maliyetle daha yüksek performansla uçakların gelişmesi için çalışmalar yapmışlardır. Kullanılan ürünlerin daha dayanıklı ve daha uzun ömürlü olabilmesi için bazı hesaplamalar yapılmıştır.

İstatistikçiler bu hesaplamaları yaparken güvenilirlik teorisine ve sistem imzalarına ihtiyaç duymuşlardır. Yapılan hesaplamalarla, ikinci dünya savaşında kullanılan uçakları incelemişlerdir. Bu uçakları, önceki bilim adamları hasar görmeyen yerleri onararak tekrar uçuşa hazır duruma getirmişlerdir. Fakat bu başarısızlıkla sonuçlanınca bazı matematikçi ve istatistikçi bilim adamları uçağın hasar görmeyen yeri değil de hasar gören yerlerinin onarılması fikrini ortaya koymuşlardır. Buradaki amaç, uçak hasar almasına rağmen geri dönmüşse, hasar gören yer onarılırsa daha uzun ömürlü ve dayanıklı olacağı kanaatine varmışlardır. Bu yaklaşımla ürünlerin sistem imzaları incelenerek, bazı teorem ve uygulamalarla uçaklar daha dayanıklı duruma gelmişlerdir. Günümüzde özellikle büyük devletlerin hava savunma sanayisine baktığımızda istatistiksel hesaplamalar çok büyük bir öneme sahip olmuşlardır. Bu hesaplamalarla daha dayanıklı, daha uzun ömürlü ve daha seri üretime geçilmiştir.

Bu tez çalışmasında sistem imzaları daha da geliştirilerek daha farklı yöntemler uygulanmıştır. Sistem imzalarını incelediğimizde, bazı sistemler seri ve paralel sistemde çalışmamasına rağmen ardışık n-den k çıkışlı G sistemde çalıştığı görülmüştür. Bizde bu tez çalışmamızda sıra istatistiklerini de dâhil ederek arızalı olan sistemleri sıra istatistikleri yardımıyla çalışmasını sağlayarak, daha farklı fikirler ortaya koymaktayız.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>ÇİZELGE</u> **Sayfa**

ŞEKİLLER DİZİNİ

ŞEKİL **Sayfa**

1. GİRİŞ

Sanayinin devriminden sonra teknolojinin gelişmesiyle birlikte malzemelerin ömürleri ve yaşam kaliteleri günlük hayatımızda daha da önem kazanmaya başlamıştır. Belirlenen bir t zamanı geçtikten sonra ilgilenilen ürünün ömür niteliği veya t zamanda kalan yaşam süresi istatistiksel olarak önemli bir yer tutmaktadır. Bu tür olaylar sistem güvenilirliği ile belirlenmektedir.

Sistem güvenilirliği ve sistem imzaları ile ilgili çalışmalar, 2. Dünya Savaşından sonra, özellikle Avrupa'da yaşanan krizlerin etkisiyle daha da önem kazanmıştır [1-3]. Güvenilirlik, herhangi bir sistemin veya parçanın hedeflenen bir işlevi, verilen şartlar altında, önceden hedeflenen bir zaman aralığında yerine getirmesidir(ISO 8402). Tanımdan da belirtildiği gibi güvenilirlik, bileşenlerin ne kadar dayanıklı olduğunu tespit etmek ve ölçebilmek için kullanılmaktadır. İlk bakışta bu tanımın sonuç vurgusu savunma sanayisi olarak görülse de günümüzde çoğu endüstriyel anlamda kullanılmaktadır. Güvenilirlik ve yaşam testinin kökleri, 2. Dünya Savaşında kullanılan uçaklarda, mühendislik sistemlerinin performans uygulamalarında ortaya çıkmıştır. Güvenilirlik konularını en erken inceleyen, istatistik üyesi olan Abraham Wald ve Columbia Üniversitesi araştırma grubudur [4]. 2. Dünya savaşında, ülkeler savaşı kazanmak için birçok politik, stratejik ve matematiksel problemleri çözümleme yapmakla mücadele etmişlerdir. En önemli sorunların başında ise uçakları düşman işgaline ve saldırısına karşı dayanıklı hale getirebilmektir. İlk başlarda uçakları zırhla kaplamayı düşünseler de mühendisler ve istatistikçiler, bunun işe yaramayacağı sonucuna varmışlardır. Çünkü tamamen zırhla kuşanan bir uçağın kalkması ve hazırlanması çok zor bir ihtimal olarak görülüyordu. Daha sonra bazı istatistikçiler, düşman saldırısından meydana gelen hasarları inceleyerek, uçak kaybını en aza indirgeyebilmek için bazı fikirler öne sürmüşlerdir. Bunun üzerine uçakların en fazla hasar gördüğü yerleri tespit etmişlerdir. Daha sonra bu hasarlı yerleri onarmayı ve zırhla kaplamayı düşündüler. Tam bu noktada Macar matematikçi Abraham Wald adında bir bilim adamı, bu plana katılmayarak farklı ve ilginç bir fikir öne sürmüştür [4]. Ona göre, hasar görülen yerler değil de uçağın hasar görmediği yerleri incelemiştir. Wald, istatistikçi ve mühendislerle birlikte uçağın hasar görmeyen yerleri ile ilgili bir şema hazırlamıştır. Ona göre uçak hasar görmesine rağmen eğer geri dönmüşse uçağın hasar görmeyen yerlerinin onarılmasının daha doğru olduğunu savunmuştur. Aslında bulduğu şey, Survival Bias yani Hayatta Kalma Önyargısı diye bilinen bir mantık hatasıydı [4]. Bu düşünceye göre, herkese odaklanmak yerine, sadece hayatta kalanlara odaklanma eğilimi olarak değerlendirebilir. Wald'ın dikkatini çekmek istediği husus, geri dönen uçaklar mermi darbesi almalarına rağmen geri dönmüşlerdi. Dönemeyen uçakların motorlarında ve merkez gövdesinde hasar aldığını tespit etmişti. Ona göre, motoru ve merkez gövdeyi daha iyi bir duruma getirebilirsek uçakların daha sağlam olacağına inanmıştır. Çalışmaları, o dönemler de yeni ortaya çıkan operasyonel araştırma disiplininde ufuk açıcı ve yenilikçi olarak kabul edilmektedir.

2. Dünya Savaşında kullanılan uçakları inceleyen Wald, çeşitli görevlerden dönen uçakların gövdelerini, özellikle hassas bölgelerini güçlendiren Wald, nihayetinde daha yüksek bir şekilde geri dönen uçak oranına ulaşmıştır [4]. Wald'ın bunlarla ilgili araştırmasındaki sorunları, 1970'lerin sonlarına doğru sınıflandırmıştır [5]. Samaniego, güvenilirlik teorisi ile ilgili önemli ilerlemeleri 1950'li yılların başında yapmıştır. Özellikle dikkat çeken nokta, Epstein ve Sobel'in, gerçekte aslında bulgu, iddiayı destekliyor olsa da desteklemiyormuş gibi davranarak sistem ömrü için tahminlerde bulunmalarıdır. Üstel verilerden alındığı varsayılan; sansürlenmiş veriler dağılımı ya da sipariş istatistiği olarak adlandırılmaktadır. Grenander'in güvenilirlik açışından parametrik olmayan çıkarımlar hakkındaki makalesi son derece etkili olmuştur. Zelen'in, 1962 tarihli yılında verdiği konferans, istatistiksel güvenilirlik teorisi alanına dikkat çekilen ve vurgulanan en etkili çalışma olarak görülmektedir [4]. Boeing Aircraft Company şirketinde, kapsamlı bir güvenilirlik teorisinin geliştirilmesinde oluşturulan kuantum sıçraması ile istatistiksel bir araştırma ekibinin oluşması, eş zamanlı olarak meydana gelmiştir. 1960'ların başlarında çekirdek üyeleri James Esary, Albert Marshall, Frank vardı [4]. Proschan ve Sam Saunders, Boeing'deki şirkette on yıl boyunca, modern Güvenilirlik Teorisinin temel kavramlarını, modellerini ve yöntemlerini geliştirdiler [4]. Bu yapısal güvenilirlik sistemlerinin tasarlanma şekli ve bu tasarımların sistemin performansını nasıl etkilediğini incelemişlerdir. Ürünlerin kullanım ömürlerini, modellemeye odaklanan stokastik güvenilirlik sistemlerin ve bileşenlerin özelliklerini incelemişlerdir. Ve bunların genel özellikleri hakkında çıkarımlar yapmaya yoğunlaşmışlardır. Bazı bilim adamları 1960'lı yıllarda bazı konferanslar ve çalışmalar yaparak çok farklı ve yeni yollar izlemişlerdir. Özellikle Avrupa'da ve Amerika'da birçok seminerler verilerek, yeni tezler ve yeni teoremler ortaya koymuşlardır. Bu incelemede bilim adamları, bir sistemin performansı ile o sistem arasındaki temel bağlantıyı incelemek için bazı yöntemler geliştirmişlerdir. İncelemelerinde, sistemler arasındaki ayrımı yapabilmek için yapı işlevini kurmuşlardır. Buradaki amaç, bir sistemin daha iyi performans göstermesini amaçlamak istemişlerdir. Herhangi bir ürünün güvenilirliğini belirlemek için gözlemsel ve nicel metotlar yeterlidir. Herhangi bir sistemi incelerken, bilim adamlarının ilk inceledikleri durum, sistemin güvenilirliği ve tutarlı olmasıydı. Daha sonra yapı fonksiyonu ve yapı işlevi kullanılarak bu durum daha da geniş çaplı bir inceleme yol açmıştır. Birbirleriyle aynı üretim aşamasından geçen ürünlerin güvenilirliklerinin de aynı olması beklenmektedir. Ve aynı hammaddeler ile üretimi yapılan ve özdeş mekânda kullanılan ürünlerin güvenilirliklerinin de özdeş olacağı tahmin edilmektedir. Herhangi bileşenlerden oluşan

sistemlerde ise daha zaman alıcı ve karmaşık yöntemlere ihtiyaç duyulabilir. Bu güvenilirlik hesaplamaları, sistemlerin tasarlanmasına ve ürünlerin değişkenliğine göre farklılık gösterebilir. Bir sistemi oluştururken, bileşenlerin birbirleriyle bağımlı ya da bağımsız oluşması incelenir. Daha sonra, tamir edilemez veya tamir edilebilir gibi durumlarla karşılaşılır. Tıpkı istatistikte yokluk hipotez testinde yapılan analizlerdeki gibi iki ihtimal olarak değerlendirilebilir. Bir olasılığın başarılı ya da başarısız olma ihtimali gibi, ya da sağlam veya bozuk olarak analiz edilmesi gibi. Bazı sistemler tasarlanırken, sistemi tehdit eden bazı sorunlar ve bu sorunlar için alınan tedbirler gibi çeşitli değişkenler de sistemin güvenilirliğini değerlendirilirken hesaba katılabilir. Bu tarzdaki değişkenler oluşturulan sistemin güvenilirliğinin hesaplanması daha karmaşık hale getirip işlemi zorlaştırmaktadır. Fakat kesin bir güvenilirlik değerinin hesaplanması, hayati önem taşımaktadır.

Sistem kelimesi, kökeni Latinceden gelmektedir. Latince birleşme, oluşma, bir araya gelme anlamını taşıyan systema'dan; o da Yunanca gene aynı anlamlara gelen sustema kelimesinden türemiştir. Sistem, kısaca birbiriyle ilişki içerisinde olan, birbiriyle etkileşen elemanlar bütününe denir.

Bir sistemin performansı, o sistemin kendi aralarındaki bağlantı bileşenlerini oluşturmaktadır. Sistemleri ayırt etmek ve bir sistemin diğerinden daha iyi performans gösterip göstermeyeceğini belirlemek için ‘‘ yapı fonksiyonu’’ incelenmiştir. Bu işlevler sınıfı, kolaylıkla olmasa da herkes için bir dizin olarak kullanılabilir. İlgili sistemlerden herhangi biri seçilebilir ve bir sistemin diğerlerinden daha fazla yapı fonksiyonu hesaplanabilmektedir. Bu monografinin amacı, sistematik bir incelemeyi sunmaktır. Yapısal güvenilirlikteki alternatif araç sistem imzalarıdır.

Belirli bir çalışma sahasındaki sistemlerden hangisinin daha kullanışlı olduğu, durumu daha iyi ifade edebildiği veya daha uzun ömürlü olduğunu belirleyebilmek için sistemlerin karşılaştırılması gerekir. Tutarlı bir sistemi, onların yapı fonksiyonlarını ve kayıp yönlerini, bir sistemi diğer sistem ile karşılaştırmak için bir çalışma aracı olarak kullanırız.

Tutarlı sistemlerin karşılaştırılmasında sistem imzası önemli bir yer tutmaktadır. Sistem İmzası kavramı ilk kez Samaniego tarafından ortaya atılmıştır [5].

Sistemleri dört ana başlık altında değerlendirebiliriz. Bunlar, seri sistem, paralel sistem, n'den k çıkışlı sistem ve ardışık n'den k çıkışlı sistem olmak üzere dört şekilde incelenmektedir. Bunların arasında en çok teoremlerin üretildiği, incelemelerin yapıldığı ve en çok üzerinde durulan sistem, n-den k-çıkışlı sistemlerdir. Çünkü bazı değişik k ve n değerleri için elde edilen sistemler farklılık gösterdiğinden bir birinden farklı sistemler elde edilebilir. n-den k-çıkışlı-F sistem, n-den k-çıkışlı-G sistem ve ardışık sistemler n-den k-çıkışlı sistemlerin bazı özel durumlarıdır.

Bu konuda birçok çalışma ve inceleme yapılmıştır. Avrupa'daki bazı bilim adamları verdikleri seminer ve konferanslarda, ardıl n'den k çıkışlı: F sistemler üzerine bazı makale ve incelemeler yayınladılar. Bu incelemelerde özdeş dağılımlı ve bağımsız bileşenlerden meydana gelen sistemlerin güvenirliklerinin hesaplanamadığı durumlarda güvenilirlik değeri için üst ve alt sınırlar elde ettiler. Ayrıca alt ve üst sınırları elde etmek için bazı teoremler geliştirerek daha da detaylı bir şekilde sunmuşlardır.

Özdeş dağılımlı olmayan ve bağımsız bileşenlerden oluşan sistemler için ise yüksek güvenilirliğe sahip sistem tasarımı üzerine bazı yaklaşımlar geliştirdiler. Koutras ve arkadaşları 1990'lı yıllarda iki boyutlu ardışık F sistemlerin güvenilirliğinin hesaplanması üzerine bir yaklaşım geliştirdiler [5]. Özdeş dağılımlı olmayan ve bağımsız bileşenlerden meydana gelen F sistemlerin güvenilirlik değerlerinin elde edilmesi zor olan durumları içi güvenilirliğin alt ve üst sınırlarını elde ettiler. Chao ve arkadaşları 1995 yılında n-den k-çıkışlı ardışık sistemler için geniş kapsamlı bir derleme oluşturdular [6].

21. yüzyılda gelişen teknolojiyle birlikte bazı bilim adamları, n-den k-çıkışlı-G sistem üzerine bir çalışma yayınladılar. Bahsi geçen araştırmada sistemin düzgün bir şekilde çalışması için görevini yerine getirmesi gerekli minimum bileşen sayısının hangi farklı durumlarda olması gerektiğini araştırdılar ve bu farklı durumların kaç değişik şekilde olabileceğini araştırdılar.

Navarro ve arkadaşları ise sistem imzası yardımıyla aynı boyutlu bağımlı bileşenlere sahip tutarlı sistemlerin sıralamalarını incelemiştir [7]. Bunlara ek olarak, Navarro ve diğerleri, farklı boyutlu tutarlı sistemlerin sistem imzası ile sıralamalarını araştırmıştır[8]. Bileşen sayısı az olan sistemlerin sistem imzasını hesaplamak kolay iken çok boyutlu tutarlı sistemlerin imzasını hesaplamak oldukça zordur. Bu problemi ortadan kaldırmak için Da ve diğerleri, çok boyutlu sistemleri alt sistemlere ayırma prensibine dayanan ve bu tür sistemlerin imzasının hesaplanmasını kolaylaştıran iki formül geliştirmiştir [9]. Sistem imzası, sistemi oluşturan her bileşenin bilgisi ile hesaplanmaktadır. Bu durum, bazen sistem imzasının hesaplanmasını güçleştirmektedir. Bu tür durumlar için Marichal ve arkadaşları, sistem imzasının türev yardımıyla yapı fonksiyonundan direk hesaplana bileceğini göstermiştir [10].

Günümüzde artık teknolojinin ve makinaların hızla gelişmesiyle ürünler için en önemli durumlar, uzun ömürlü ve güvenilir olmasıdır. Sistem imzalarını incelerken, tüm bilim adamlarının ortak fikri olan sistem güvenilirlik teorisi ve yaşam testleri incelenecektir. Materyal ve metot kısmındaki tanımları inceleyerek, sistem imzaları hakkında bazı bilgiler ve teoremler incelenecektir.

2. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde bazı temel tanımlardan bahsedildi. Aşağıdaki bazı tanımları inceleyerek sistem imzası, sistem güvenirliliği… vb. kavramlar hakkında bilgi sahibi olunabilir.

2.1. Sıra İstatistikleri

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ tesadüfî değişkenlerinin meydana gelme sırası değil, büyüklüklerinin sırası göz önüne alınırsa bu tesadüfî değişkenlerin sıralı istatistikleri,

$X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \ldots \leq X_{n:n}$

olarak ifade edilir.

$X_{r:n}$, tesadüfi değişkenine r-inci sıra istatistiği ve $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \ldots \leq X_{n:n}$ tesadüfi vektörüne de sıra istatistikleri denir. $X_{1:n}$, örneğin minimumu ve $X_{n:n}$, örneğin maksimumudur.

Bundan dolayı,

$X_{1:n} = \min (X_1, X_2, \ldots, X_n)$

ve

$X_{n:n} = \max (X_1, X_2, \ldots X_n)$

yazılabilir [11].

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ bir dağılımdan (kitleden) alınan aynı dağılıma sahip bağımsız tesadüfî değişkenler olmak üzere

$Y_1 = min\{X_1, X_2, \ldots, Xn\}$

$Y_2 =$ 2. en küçük$\{X_1, X_2, \ldots, Xn\}$

$\vdots$

$Yn = max\{X_1, X_2, \ldots, Xn\}$ olarak tanımlanmaktadır.

$Y_1, Y_2, \ldots, Yn$'lere sıra istatistikleri denir. Sıra istatistikleri

$X(1), X(2), \ldots, X(n)$ ile de gösterilebilir.

$(\Omega, \Im, P)$ bir olasılık uzayı olmak üzere $\forall$ w ϵ Ω için $X(1)(w) \leq X(2)(w) \leq \cdots \leq X(n)(w)$ sıralaması mevcuttur.

$R = max\{X_1, X_2, \ldots, Xn\} - min\{X_1, X_2, \ldots, Xn\}$ ile açıklık (range) gösterilmektedir.

Birinci ve n. sıra istatistiğinin dağılım ve olasılık yoğunluk fonksiyonları aşağıdaki teoremlerle veriliyor.

Sürekli tesadüfî değişkenler için sıra istatistiklerine bakarsak;

Teorem 1.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ tesadüfî değişkenleri sürekli bağımsız ve aynı dağılıma sahip olmak üzere bunların olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ dağılım fonksiyonu $F(x)$ ile gösteriliyor. Buna göre Y_n'nin dağılım ve olasılık yoğunluk fonksiyonları sırası ile

$G_{Y_n}(y_n) = (F_{X_i}(y_n))^n$ $g_{Y_n}(y_n) = n\,(F_{X_i}(y_n))^{n-1} f_{X_i}(y_n)$ dır [12].

İspat 1.

$G_{Y_n}(y_n) = P(Y_n \leq y_n)$, aşağıdaki eşitsizlik dikkate alındığında,

$(\boldsymbol{max}\,(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \leq \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{a}) \cap (\boldsymbol{Y} \leq \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{a}, \boldsymbol{Y} \leq \boldsymbol{a})$

$G_{Y_n}(y_n) = P(max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \leq y_n) = P(X_1 \leq y_n, X_2 \leq y_n, \dots, X_n \leq y_n)$ yazılır.

$i = 1, 2, \dots, n$ için X_i 'ler bağımsız ve aynı dağılıma sahip olduğundan

$G_{Y_n}(y_n) = P(X_1 \leq y_n)P(X_2 \leq y_n) \dots P(X_n \leq y_n) = (F_{X_i}(y_n))^n$

dır. Böylece (1.3) elde edilir.

$dG_{Y_n}(y_n)/dy_n = g_{Y_n}(y_n)$

$g_{Y_n}(y_n) = n\,(F_{X_i}(y_n))^{n-1} f_{X_i}(y_n)$

(1.4) bulunarak teorem tamamlanır.

1. sıra istatistiğinin dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki teoremle veriliyor.

Teorem 2.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ tesadüfî değişkenleri sürekli bağımsız ve aynı dağılıma sahip olmak üzere bunların olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_X(x)$ dağılım fonksiyonu $F_X(x)$ ile gösteriliyor. Buna göre Y_1'in dağılım ve olasılık yoğunluk fonksiyonları sırası ile $i = 1, 2, \dots, n$ için:

$$G_{Y_1}(y_1) = 1 - (1 - F_{X_i}(y_1))^n$$
$$= 1 - \overline{F_{X_i}}(y_1)^n$$
$$g_{Y_1}(y_1) = n\,(1 - F_{X_i}(y1))^{n-1} f_{X_i}(y_1)$$
$$= n\overline{F_{X_i}}(y_1)^{n-1} f_{X_i}(y_1)$$

İspat 2.

$G_{Y1}(y_1) = P(Y_1 \leq y_1)$

aşağıdaki eşitsizlik dikkate alındığında,

$(\boldsymbol{min}\ (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \leq \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{a}) \cup (\boldsymbol{Y} \leq \boldsymbol{a})$

$GY_1(y_1) = P(min\{X1, X2, \ldots, Xn\} \leq y1)$

$= P((X1 \leq y1) \cup \ldots \cup (Xn \leq y1))$

De Morgan kuralından

$GY_1(y_1) = 1- \overline{P((X1 \leq y1) \cup (X2 \leq y1) \cup \ldots \cup (Xn \leq y1))}$

$= 1- P((X_1 > y1) \cap (X_2 > y_1) \cap \ldots \cap (Xn > y_1))$

i=1,2,…,n için Xi'ler bağımsız ve aynı dağılıma sahip olduğundan,

$GY_1(y_1) = 1-(P(Xi > y_1))^n$

$=1-(P(Xi \leq y_1))^n$

$=1-(1-(Fxi(y_1)))^n$

$=1-(\overline{Fxi}(y_1))^n$

$\frac{dGy1(y1)}{dy1} = gy_1(y_1)$

$gy_1(y_1) = n(1-FXi(y1))^{n-1} fXi(y1), \quad -\infty < y1 < \infty$

olur[12].

Teorem 3.

$X_1, X_2, \ldots, Xn$ tesadüfi değişkenleri sürekli bağımsız ve aynı dağılıma sahip olmak üzere bunların olasılık yoğunluk fonksiyonu $fX(x)$ dağılım fonksiyonu $FX(x)$ ile gösteriliyor. Buna göre Y_1 ve Yn'nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$g_{Y_1,Yn}(y_1,yn) = n(n-1)\,(FYn(yn) - FY1(y1))^{n-2}\ fY_1(y_1) fYn(yn)$

dir[12].

İspat 3.

Y_1 ve Y_n in ortak dağılım fonksiyonu,

$GY_1,Yn(y_1,y_n) = P\ \underbrace{Y1 \leq y1}_{A}, \underbrace{Yn \leq yn}_{B}$

$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \setminus (\boldsymbol{B} \cap \bar{A})$

$GY_1,Yn(y_1,y_n) = P(Y_1 \leq y_1, Yn \leq y_n)$

$= P(Yn \leq y_n) - P(Yn \leq y_n, Y_1 > y_1)$

$=P(Yn \leq y_n) - P(y_1 < X_1 \leq y_n, \ldots, y_1 < Xn \leq yn)$

elde edilir. $i=1,2,\ldots,n$ için Xi'ler bağımsız ve aynı dağılıma sahip olduğundan

$GY_1,Yn(y_1,y_n) = P(Yn \leq y_n) - \prod_{i=1}^{n} P\ (y1 < Xi \leq yn)$

$= G_{Y_n}(yn) - \prod_{i=1}^{n}[F(yn) - f(y1)]$

$= (F_{Y_n}(y_n))^n - \ (F_{Y_n}(y_n) - FY_1(y_1))^n$

Y_1 ve Yn 'in ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$gY_1,Yn(y_1,yn) = \frac{\partial 2GY1,Yn\ (y1,yn)}{\partial y1\ \partial yn}$

Böylece $-\infty < y_1 < y_n < \infty$ için,

$g_{Y_1},Y_n(y_1,y_n) = \ n(n-1)\ (F_{Y_n}(y_n) - F_{Y_1}(y_1))^{n-2}\ \ fY_1(y_1) fY_n(y_n)$

bulunur.

Örnek 1.

$U(0,1)$ dağılımından alınan $X_1,X_2,\ldots,X_n$ bağımsız ve bir örneklem olmak üzere Y_1 ve Y_n'in ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

$$g_{Y_1},Y_n(y_1,y_n) = \begin{cases} \{n(n-1)(yn-y1)n-2 & , \quad 0 < y1 < yn < 1 \\ \quad 0 & , \quad \text{d.d.} \end{cases}$$

bulunur[12].

Teorem 4.

$X1,X2,\ldots,Xn$ olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ ve dağılım fonksiyonu da $F(x)$ olan bir kitleden çekilmiş bir örneklem olsun. Yk nın yoğunluk fonksiyonu $gYk(y)$ dağılım fonksiyonu da $GYk(y)$ olmak üzere,

$gYk(y) = kC(n,k) fX(y)[FX(y)]^{k-1}[1-FX(y)]^{n-k}$

$GYk(y) = kC(n,k)$ [12].

Örnek 2.

$U(0,1)$ dağılımından alınan $X_1,X_2,\ldots,X_n$ örneklemi için Y_k nın olasılık yoğunluk fonksiyonu olan $g_{Y_k}(y)$'yi bulunuz[12].

$g_{Y_k}(y) = kC(n,k) y^{k-1}(1-y)^{n-k}$

Örnek 3.

Yk sıra istatistiği (0, 1) aralığında, $(k,n-k+1)$ parametreli beta dağılımına sahiptir.

$$fX(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases}$$

$$FX(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ x, & 0\le x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

$gK(y)=kC(n,k))y^{k-1}(1-y))^{n-k}$

elde edilir[12].

n tane sıra istatistiğine ait ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki teoremle veriliyor.

Teorem 5.

$Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$ sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$h(y_1,y_2,\ldots,y_n)=\begin{cases} n!\,f(y1)f(y2)\ldots f(yn), & -\infty<y1<y2<\cdots<yn<\infty \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases}$$ [12].

Örnek 4.

$U(0,1)$ dağılımından alınan $X_1,X_2,\ldots,X_n$ örneklemine ait $Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$ sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

$$h(y_1,y_2,\ldots,y_n)=\begin{cases} n!, & 0<y1<y2<\cdots<yn<1 \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases}$$

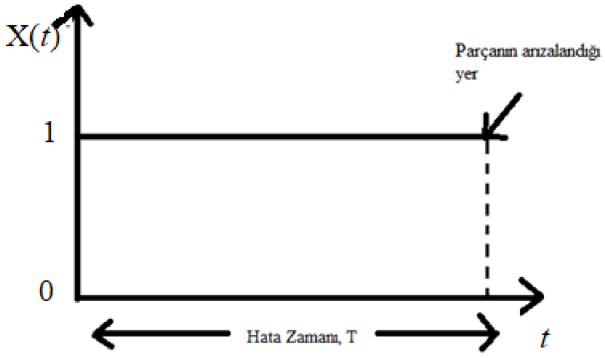
biçimindedir[12].

2.2. Durum Değişkeni.

Durum değişkeni; Bir sistemin gelecekteki davranışını hesaplayabilmek için sistemin durumunu hakkında yeterli bilgiyi taşıyan değişkenlerden biridir. Bir bileşenin t anında çalışıp çalışmadığı, durum değişkeni olarak tanımlanır. t zamanındaki durum değişkeni genel olarak $X(t)$ şeklinde ifade edilir ve

$$X(t)=\begin{cases} 1, & \text{t zamanında bileşen çalışıyor ise} \\ 0, & \text{t zamanında bileşen çalışmıyor ise} \end{cases}$$

şeklinde gösterilir [13].



Şekil 2.1.Bir parçanın durum değişkeni ve hata zamanı

2.3. Hata Zamanı

Herhangi bir ürünün tasarlandığı gibi başarılı bir şekilde çalışmaya başlamasından, ilk arıza vermesine kadar geçen zamana aralığına hata zamanı denir. Hata zamanı rassal bir değişkendir ve T ile ifade edilir. X(t) durum değişkeni ile T hata zamanı arasındaki ilişki, yukarıdaki Şekil 2.1'de gösterilmiştir[13].

Tesadüfî değişkenler X,Y,Z,… gibi büyük harflerle ya da ξ,η,ζ,…gibi yunan harfleri ile bunların aldığı değerler de x,y,z,.. gibi küçük harflerle gösterilir. Tesadüfî değişkenler kesikli ya da sürekli olmak üzere iki kısma ayrılır. Örneğin, 200 kişilik bir sınıftan tesadüfî olarak seçilen bir öğrencinin boy uzunluğu ve ağırlığı sürekli tesadüfî değişken iken bu öğrencinin dakikadaki nabız sayısı ve kardeş sayısı kesikli tesadüfî değişkene örnek olarak verilebilir. Belirli bir saatte bir benzin istasyonuna gelen araç sayısı kesikli tesadüfî değişkene bir örnektir. Bir fabrikada üretilen televizyonların ömürleri saat olarak sürekli bir tesadüfî değişkendir. Yani herhangi bir tesadüfî değişkenin aldığı değer sayılabilir ise bu tesadüfî değişkene kesikli tesadüfî değişken, sayılamaz ise sürekli tesadüfî değişken denir.

$(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayı olmak üzere

$$X: \Omega \to R$$

$$w \to X(w)$$

fonksiyonu, $\forall\, x \in R$ için , $\{w: X(w) \leq x\} \in \Im$ özelliğini sağlıyorsa bu fonksiyona tesadüfi değişken denir. Burada bir fonksiyonun ters görüntüsü tanımından $X^{-1}(-\infty, x] = \{w: X(w) \leq x\}$ yazılır, bu bağlamda yukarıda tanımlanan fonksiyonun bir tesadüfî değişken olabilmesi için gerekli koşul, ∀

$x \in \mathsf{R}$, X^{-1} $(-\infty,x] \in \mathfrak{I}$ olarak yazılabilmesidir. Tesadüfî değişken kısaca, örnek uzayının her noktasına bir reel sayı eşleştiren bir fonksiyon olarak da tanımlanır[13].

Örnek 5.

Hilesiz bir madeni paranın üç kez havaya atılması deneyini düşünelim. $\mathfrak{I}$, kuvvet kümesi olsun ve olasılık ölçüsü de $\forall \in \mathfrak{I}$ için P(A)=n(A)/8 olarak tanımlansın. (Ω, $\mathfrak{I}$,P) bir olasılık uzayı ve buradaki örnek uzayı,

Ω:{YYY, YYT, YTY, YTT, TYY, TTY, TYT, TTT}

dır. Paranın havaya üç kez atıldığında üste gelen yazıların sayısını göstersin. Fonksiyonu bir tesadüfî değişken midir?

Paranın havaya üç kez atıldığında üste gelen yazıların sayısını gösterdiği bilindiğinden

$$X:w \rightarrow X(w) = \begin{cases} 0, & w = TTT \\ 1, & w = YTT, TYT, TTY \\ 2, & w = YTY, TYY, YYT \end{cases}$$

$$\{3, \qquad w = \mathrm{YYY}$$

olarak yazılır. Bu fonksiyonunun tesadüfî değişken olabilmesi için tanım gereğince $\forall$ $x \in$ R için $\{w:X(w)\leq x\} \in \mathfrak{I}$ olduğunu aşağıdaki gibi gösterebiliriz:

$x<0$ ise $\{w:X(w)\leq x\}=\emptyset \in \mathfrak{I}$

$0\leq x<1$ ise $\{w:X(w)\leq x\}=\{TTT\} \in \mathfrak{I}$

$1\leq x<2$ ise $\{w:X(w)\leq x\}=\{TTT, TTY, TYT, YTT\} \in \mathfrak{I}$

$x\geq 3$ise $\{w:x(w)\leq x\}= \Omega \in \mathfrak{I}$

Yukarıdaki tüm aralıkların birleşimi R kümesini verdiğinden X fonksiyonu bir tesadüfî değişkendir. X tesadüfî değişkenin tanım kümesi D_x ile gösterilecektir.

$D_x=X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$

X tesadüfî değişkenine ait aşağıdaki olasılıklar

$P(x\leq 0)= P\{w:X(w)\leq 0\}=1/8$

$P(x\leq 1)=4/8$,

$P(x=2)=3/8$,

$P(x=1/2)=P(\emptyset)= 0$ ve

$P(x=5)=P(\emptyset)=0$

bulunur[12].

Hata zamanı tanımı esasen biraz yanıltıcı olabilir. Çünkü T hata zamanı her zaman süre şeklinde hesaplanmayabilir. Örneğin, dönemsel çalışan bir sistemin birden fazla tekrarlanma sayısı, bir bisikletin hareketi boyunca aldığı yol, bir makinanın maruz kaldığı darbe veya şok sayısı gibi ölçüler de hata zamanın ile ilişkilendirile bilinir. Bundan dolayı hata zamanı çoğu zaman kategorik bir değişken şeklinde düşünülebilir. Ancak kategorik bir değişkene, kesikli bir değişken vasıtasıyla yaklaşılabilir. Bu nedenle hata zamanı, $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu ve $F(t)$ dağılım fonksiyonu olan kesikli bir değişken olarak kabul edilir. F(t),Parçanın (0,t] aralığında arızalanma olasılığıdır. F(t) dağılım fonksiyonu,

$$F(t) = \Pr(T \leq t) = \int_0^t f(u)du, \qquad t > 0 \; için$$

şeklinde tanımlanır.

$f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu ise

$$f(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}F(\mathrm{t}) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Pr(t<T\leq t+\Delta t)}{\Delta t}\right)$$

şeklinde tanımlanır. Δt çok küçük ise

$$\Pr(t \leq T + \Delta \mathrm{t}) \approx f(t)\,\Delta t$$

şeklinde bir olasılık tanımlanmaktadır [12].

Dağılım fonksiyonuna birikimli dağılım fonksiyonu da denir. Buna göre aşağıdaki tanım veriliyor. $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayı ve X tesadüfî değişkeni bu uzayda tanımlı olsun, $\forall\, x \epsilon R$ için X rastlantı değişkeninin dağılım fonksiyonu,

$F_x(x)=P(X\leq x)$, $0 \leq F_x(x) \leq 1$

bağıntısı ile tanımlanır. X t.d. yardımıyla ifade edilen tesadüfî bir sınama hakkındaki bilginin çoğu, $F_x(x)$ ile tanımlanır. $P(x>x)=1- F_x(x)$ ifadesine dağılım fonksiyonunun kuyruğu denir ve $P(x>x)= F_x(x)$ ile gösterilir.

1. $F_x(x)$ monoton artan bir fonksiyondur

   $x_1<x_2$ ise $Fx(x_1)\leq F_x(x_2)$
2. $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$
3. $x_1<x_2$ için $P(x_1<X\leq x_2)= F_X(x_2) - F_x(x_1)$
4. $F_x(x)$ sağdan kesiklidir: $\lim_{\Delta x\to 0+} F_x(x+\Delta x)=F_x(x)$

$(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayı ve X tesadüfî değişkeni bu uzayda tanımlı olsun. Ya da X tesadüfî değişkenin dağılım fonksiyonu $F_x(x)$ her yerde türevlenebilir ise,

$$f_x(x)= \frac{d\mathrm{Fx(x)}}{dx}$$

f_x (x) ‘e olasılık yoğunluk fonksiyonu denir.

1. $fx(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} fx(x)dx = 1$
3. $P(x_1 < X \leq x_2) = \int_{x1}^{x2} fx(x)dx = Fx(x_2) - Fx(x_1)$
4. $Fx(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} fx(s)ds$

olarak veriliyor[12].

Örnek 6.

X sürekli t.d. nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$fx(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & d.d \end{cases}$$

olmak üzere, X kesikli t.d. nin dağılım fonksiyonunu bulunuz.

$F_X(x) = \int_0^X f_X(s)ds = X^2$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ x^2, & 0 < y < 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases}$$

$P(X \leq 0.5) = Fx(0.5) = 0.5^2$

$P(0.5 < X < 1) = Fx(1) - Fx(0.5) = 1 - 0.5^2$

$P(X > 0.75) = 1 - P(X \leq 0.75) = 1 - 0.75^2$

$(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayı ve X t.d. i bu uzayda tanımlı olsun , $\forall$ X $\in$ Dx olmak üzere, X t.d. nin Dx’ deki değerleri alma olasılıklarını gösteren fonksiyona olasılık fonksiyonu denir ve $p_x(x)$veya p(x) ile gösterilir. Yani ,

$p_x(x) = P(X = x)$

olur.

1. Eğer x $\notin$ Dx ise $p_x(x) = 0$,
2. $\forall$ x $\in$ Dx ise $0 \leq p_x(x) \leq 1$,
3. $\sum x \in$ Dx $p_x(x) = 1$,
4. $Fx(x) = \sum n \leq x \; p_x(n)$, n $\in$ Z

biçimindedir[12].

Örnek 7.

X kesikli tesadüfi değişkenin olasılık fonksiyonu,

$$p_x\,(x)=\begin{cases}\frac{X}{21}, & x=1,2,3,4,5,6\\ 0, & d.d.\end{cases}$$

olarak veriliyor.

a.)Dağılım fonksiyonunu bulunuz.

b.)P(X≤3) , P(2<X<4) ve P(X>5) olasılıklarını bulunuz,

Aşağıdaki hesaplamalarla örneği inceleyeceğiz.

a.)Fx(x) dağılım fonksiyonu

$$Fx(X)=\begin{cases}0, & x<1\\ \frac{x(x+1)}{42}, & x=1,2,3,4,5,6\\ 1, & x\geq 6\end{cases}$$

biçiminde elde edilir.

b.)Olasılık fonksiyonu yardımıyla

P(X≤3) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=3) = 6/21

P(2<X<4) = P(X=3) = 3/21

P(X>5) = P(X=6) = 6/21

Dağılım fonksiyonu yardımıyla

$P(X\leq 3) = \frac{3(3+1)}{42} = 6/21$

$P(X>5) = 1- P(X\leq 5) =1- \frac{5(5+1)}{42} = 6/21$ [12].

Örnek 8.

X bir tablet bataryasının yıl olarak dayanma süresini gösteren bir t.d. ve bunun olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_x(x)=\begin{cases}ke^{-x}, & x>0\\ 0, & d.d.\end{cases}$$

olarak veriliyor[12]. Buna göre,

a) k sabitini bulunuz.

b) Dağılım fonksiyonunu elde ediniz.

c) Tesadüfi olarak seçilen bir bataryanın ortalama dayanma süresini hesaplayınız.

d) P(X>E(X)) =?

e) P(X>5/X>2)=P(X>3) olduğunu gösteriniz.

Aşağıdaki hesaplamalarla örneğimizi çözeceğiz.

a) $\int_0^\infty ke^{-x}dx$ =1→k=1

$$f_x(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

b) Fx(x)=P(X≤x) $=\int_0^x e^{-s}$ds =1-e^{-x}

$$Fx(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 0 \\ 1, & x \to \infty \end{cases}$$

c) E(X)= $\int_0^\infty xf(x)dx = \int_0^\infty xe^{-x}dx$=1

d) P(X>E(X))=P(X>1)=1-P(X≤1)

=1-F_X (1) =1/e

e) P(X>5/X>2)= $\frac{P(X>5)}{P(X>2)} = \frac{1-P(X\leq5)}{1-P(X\leq2)} = \frac{1-Fx(5)}{1-Fx(2)} = e^{-3}$

P(X>3) $= e^{-3}$

Bu durum üstel dağılımın belleksizlik özelliği olarak bilinmektedir[12].

2.4. Bileşen Güvenilirliği

$i \in [n] = \{1, 2, \dots, n\}$ için i. bileşenin durumu

$$x_i=\begin{cases} 1, & \text{i. bileşen t anında çalışıyorsa} \\ 0, & \text{i. bileşen t anında çalışmıyorsa} \end{cases}$$

dönüşümü ile tanımlanır. Burada n, sistemdeki bileşenlerin sayısıdır. x_i dönüşümü bir Bernoulli değişkenidir ve P(x_i=1)= p_i ile gösterilir. Ayrıca, i. bileşenin T_i yaşam süresinin herhangi bir t anından büyük olma olasılığına **bileşen güvenirliliği** denir ve i ∈ [n] için P(T_i>t)=p_i içindir [1-3].

Günümüzün mühendislik sistemleri de karmaşıktır. Örneğin, bir uzay mekiği yüz binlerce bileşenden oluşur. Birlikte çalışan bu bileşenler bir sistem oluşturur. Sistemin güvenirlilik performansı, bileşenlerinin güvenirlilik performansına bağlıdır. Son yıllarda, bileşen güvenirliliğine, sistem tasarımına ve bileşenlerin montajına dayalı olarak sistem güvenirliliğini değerlendirmek için istatistiksel ve olasılıklı modeller geliştirilmiştir. Aynı zamanda modellerin kullanışlılığına da çok dikkat etmeliyiz. Bazı modeller ve yayınlamış kitaplar anlaşılması gereken soyutlardır ve diğerleri bugünün sistemi için çözüme hitap etmenin temelidir. Bilim ve teknolojideki son gelişmeler, bugünkü mühendislik sistemlerini her zamankinden daha güçlü hale getirmiştir. Yüksek teknolojili endüstriyel süreçlerdeki artan karmaşıklık seviyesi, güvenirlilik sorunlarının sadece var olmaya devam etmekle kalmayıp aynı zamanda da daha karmaşık çözümler gerektireceği anlamına da gelmektedir. Dahası, güvenirlilik hataları bir bütün olarak, toplum üzerinde her zamankinden daha önemli bir etkiye sahiptir. Örneğin, büyük bir şehirdeki bir güç dağıtım sisteminin başarısızlığı ya da kötü yönetimin, uluslararası havalimanındaki hava trafik kontrol sisteminin arızalanmasını, bir nano sisteminin arızalanmasını, bir nükleer enerji santralinin arızalanması, internet sistemlerindeki yanlış iletişimin ya da arızasının etkisini düşünelim. Tasarım, üretim, dağıtım ve işletim dâhil olmak üzere modern mühendislik süreçlerinin tüm aşamalarında güvenirliliğin ne kadar önemli olduğunu bize göstermektedir.

2.5. Sistem Güvenilirliği

Sistemin t anında çalışıyor olma olasılığına, yani $\phi(x)=1$ olma olasılığına sistem güvenilirliği denir. n boyutlu bir sistemin güvenilirliği, $h(p)=P(\phi(x)=1)= \in \phi(x)$ eşitliği ile hesaplanır. Burada , **p**=($p_1, p_2, .., p_n$) dir [1-3].

'n' bağımsız bileşenlerden oluşan tutarlı bir sistem düşünün. Sistemin incelendiği bir 't' zamanını sabitlersek, i'inci bileşenini, p olasılığıyla çalışıyormuş gibi ele alabiliriz. Yani, pi=P(Xi=1) burada Xi Bernoulli değişkeni, 't' zamanında bileşenin rastgele durumunu temsil eder. Bir sistemin güvenirliliğini, 't' zamanında o anda çalışan olasılık olarak tanımlayabiliriz. Bu olasılık h(p) ile gösterilecektir ve yapı fonksiyonundan şu şekilde hesaplanabilir;

$$h(p) = P(\phi(X) = 1) = E\phi(X)$$

h(p) fonksiyonu her pi de doğrusaldır. Bu durumda, sistem güvenirliliği şu şekildedir:

$$h(p) = E(\phi(x))$$

$$= E(X_1X_4 + X_2X_5 + X_1X_3X_5 + X_2X_3X_4 - X_1X_2X_3X_4 - X_1X_2X_3X_5 - X_1X_3X_4X_5 - X_1X_2X_4X_5 - X_2X_3X_4X_5 + 2X_1X_2X_3X_4X_5)$$

$$= p_1p_4 + p_2p_5 + p_1p_3p_5 + p_2p_3p_4 - p_1p_2p_3p_4 - p_1p_2p_3p_5 - p_1p_3p_4p_5 - p_1p_2p_4p_5 - p_2p_3p_4p_5 + 2p_1p_2p_3p_4p_5$$

Bileşenler aynı şekilde dağıldığında, pi=p ' ye sahip olur. Ve güvenirlilik fonksiyonu h'yi sadeleştirir. Güvenirlilik fonksiyonunu, p cinsinden yazabiliriz ve

$$h(p)=2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5$$

Bu durumda h'yi güvenirlilik polinomu olarak adlandırabiliriz [1-3].

2.6. Minimal Başarı Yol Kümesi

P, sistemin bir kısım bileşenlerinden oluşan bir küme olsun. P kümesindeki bütün bileşenler çalıştığında sistem de çalışıyorsa, P' ye başarı yol kümesi denir. Yani bir kümede tüm bileşenlerde eğer arıza yoksa ve bileşenler doğru çalıştığında, sistem de doğru bir şekilde çalışıyorsa, o kümeyi başarı yol kümesi olarak adlandırabiliriz. Başka bir başarı yol kümesini kapsamayan başarı yol kümesi, **minimal başarı yol kümesi** olarak adlandırılır[1-3].

2.7. Minimal Kesen Küme

K, sistemin bir kısım ürünlerden oluşan bir küme olsun. K kümesindeki bütün ürünler başarısız olduğunda sistem de başarısız oluyorsa, K' ya kesen küme denir. Başka bir kesen kümeyi kapsamayan kesen kümeye, **minimal kesen küme** denir [1-3].

2.8. Sistem İmzası

F, (0,∞) aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Aynı F dağılımlı ve bağımsız bileşenlerden oluşan n boyutlu tutarlı bir sistemin parçaları $T_1, T_2, \ldots, T_n$ olmak üzere i, bileşeni

$Si = P(T = Ti{:}n)\ olan\ s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in [0,1]\ n$ vektörüne sistem imzası denir [1-3].

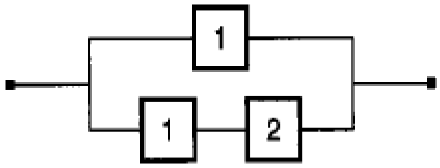
2.9. Tutarlı Sistemler

Bir sistemin bütün parçaları birbirleriyle bağlantılı ve her bir değişkeni için yapı fonksiyonu azalmayan ise bu sisteme **tutarlı sistem** denir [14]. Burada, incelenen tüm sistemlerin tutarlı olması gibi bir durum oluşabilir, fakat bu tam olarak doğru değildir. Çünkü bazı sistemler tutarsız olabilir [13].

Bir sistemin yapısı tasarlanırken, sistemin tasarlandığı gibi başarılı bir şekilde çalışması için direk etkisi olmayan bileşenleri sistemden çıkarılması mantıklı olacaktır. Bu yapılan işlemde; sistemin tasarlandığı gibi başarılı bir şekilde çalışması için direk etkisi olan ve dışarıda bırakılmayan bileşenlere bağlantılı bileşen, sistemin tasarlandığı gibi başarılı bir şekilde çalışması için direk etkisi olmayan ve hariç bırakılan yapıya ise bağlantısız bileşen adı verilir. Eğer i bağlantısız bileşen ise

ϕ $(1_i,x)$=$\phi(0_i,x)$, tüm$(._i,x)$ (2.1)

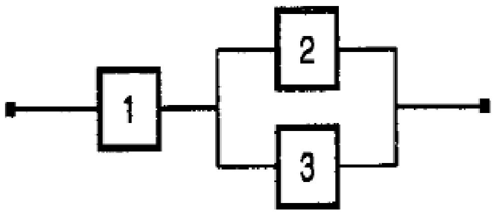
(2.1) eşitliğinin doğrulanması gerekir. Eğer bir sistemin her bileşeni bağlantılı ise ϕ $(1_i,x)$=1 ve $\phi(0_i,x)$=0 olur. (2.1) eşitliğinde; $(1_i,x)$, i. bileşenin bire eşit olduğu durumu gösteren durum vektörü, $(0_i,x)$ i. bileşenin sıfıra eşit olduğu durumu gösteren durum vektörü ve $(._i,x)$ de i. bileşenin sıfıra mı yoksa bire mi eşit olduğu durumu gösteren durum vektörüdür. Şekil 2'de 2. bileşenin bağlantısız olduğu 2 boyutlu bir sistem gösterilmektedir[14].



Şekil 2.2. Örnek sistem [13]

Örnek 9.

Şekil 2.3'de gösterilen sistemin bileşen indis kümesi $C = \{1,2,3\}$ olur.

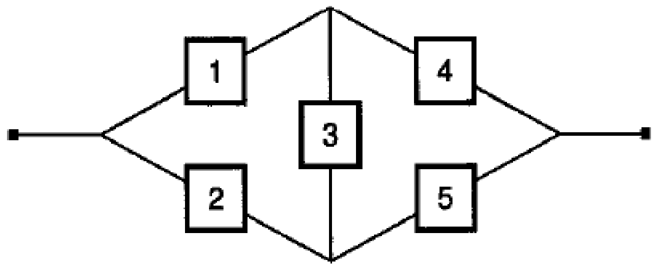


Şekil 2.3. Örnek Sistem[13].

Yol kümeleri	Kesen kümeleri
$\{1,2\}*$	$\{1\}*$
$\{1,3\}*$	$\{2,3\}*$
$\{1,2,3\}$	$\{1,2\}$
$\{1,3\}$	
$\{1,2,3\}$	

Minimal başarı yol ve kesen başarısızlık kümeleri * ile ifade edilmiştir. Bu durumda, P_1={1,2} ve P_2={1,3} kümeleri, minimal başarı yol kümeleridir. Aynı şekilde minimal kesen başarısızlık kümeleri ise K_1={1} ve K_2={2,3}' dir [13].

Örnek 10.



Şekil 2.4. Köprü yapı [13]

Şekil 2.4' de verilen köprü sistemin minimal başarı yol kümeleri aşağıda verilmiştir.

P_1={1,4} P_2={2,5} P_3={1,3,5} P_4={2,3,4}

Şekil 2.4'de verilen köprü yapının minimal başarısızlık kümeleri

K_1={1,2} K_2={4,5} K_3={1,3,5} K_4={2,3,4} ve

olduğundan bu minimal yol kümelerinin seri yapıları

$$p_1(x) = x_1.x_4$$
$$p_2(x) = x_2.x_5$$
$$p_3(x) = x_1.x_3x_5$$
$$p_4(x) = x_2.x_3.x_4$$

ile ifade edilir. Buradan köprü sistemin yapı fonksiyonu

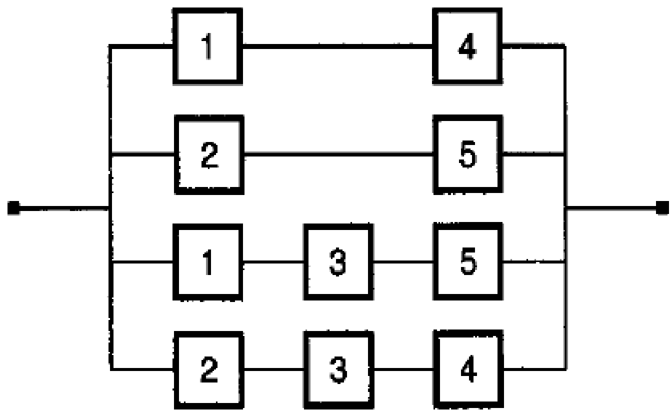
$$\phi 3(x) = \coprod_{j=1}^{4} p_j(x) = 1 - \prod_{j=1}^{4}(1 - p_j(x))$$

$$= 1 - (1 - p_1(x)).(1 - p_2(x)).(1 - p_3(x)).(1 - p_4(x))$$

$$= 1 - (1 - x_1x_4)(1 - x_2x_5)(1 - x_1x_3x_5)(1 - x_2x_3x_4)$$

$$= x_1x_4 + x_2x_5 + x_1x_3x_5 + x_2x_3x_4 - x_1x_2x_4x_5 - x_1x_3x_4x_5 - x_1x_2x_3x_4 - x_2x_3x_4x_5 - x_1x_2x_3x_5 + 2x_12x_2$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca köprü sisteminin güvenilirlik diyagramı Şekil 2.5.'deki gibi gösterilebilir [13].



Şekil 2.5. Minimal yol seri yapılardan oluşan bir paralel yapı şeklinde temsil edilen köprü yapı[13].

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

1'den n'ye kadar ardışık olarak numaralandırılmış n tane bileşenden oluşan sisteme n boyutlu sistem denir.

i bileşeninin durumu, ikili bir değişken olan xi ile tanımlanır (i=1, 2,…,n). Herhangi bir bileşen çalışıyorsa 1, aksine arızalı ise 0 ile gösterilir.

$$x_i=\begin{cases}1, & i\ bileşeni\ çalışıyorsa\\ 0, & i\ bileşeni\ arızalıysa\end{cases}$$

$x = (x1, x2, … , xn$)'e durum vektörü olarak adlandırılır. Ayrıca, n tane bileşenin tamamının çalışıp çalışmadığı öngörülüyorsa sistemin çalışıp çalışmadığı öngörülebilir. Benzer şekilde, sistemin durumu ikili bir fonksiyonla,

$$\phi(x) = (x1, x2, … , xn)$$

şeklinde tanımlanır. Bu durum fonksiyonu;

$$\phi(x)=\begin{cases}1, & sistem\ çalışıyorsa\\ 0, & sistem\ arızalıysa\end{cases}$$

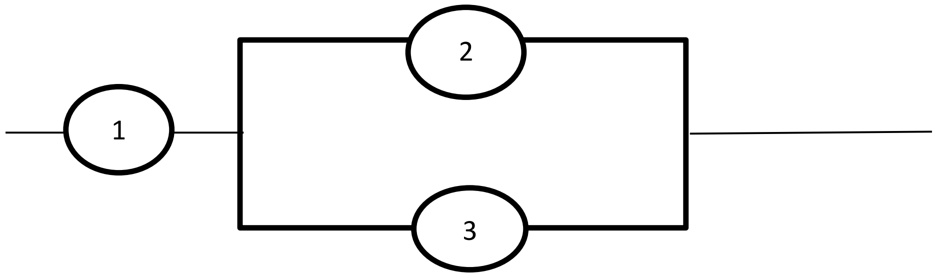
şeklinde gösterilir. $\phi(x)$ durum fonksiyonuna, sistemin yapısı adı verilir [14].

Bir sistemin bütününü oluşturabilmek için, bir şekilde birbirine bağlanan bileşenlerden oluşan temel bir sistem olarak düşünülebilir. Örneğin, somut örnek olarak bir radyoyu, bir bilgisayarı, tableti veya cep telefonunu bir sistem olarak düşünebiliriz. Bir sistemin bileşenlerinin iki ihtimali vardır. Çalışması ya da çalışmaması durumu gibi. Kısmen işleyen bir sistemi incelersek, mesela bir arabanın lastiğinin patladığını düşünelim. Bu patlak lastikli arabayla en fazla birkaç mil uzağa gidebilir. Yukarıda da belirtildiği gibi sistemin çalışıp çalışmama durumunu 1 ve 0 olarak tanımlarsak, 1 çalışma durumu, 0 ise arızalı durumu olarak değerlendirilir. Bileşenler belirli bir durumdayken, sistemin çalışıp çalışmadığı hakkında bazı teoremler öne sürülmüştür. Buradaki amaç sistemin, tam performans hedefine ulaşabilmesi için hangi yöntemler uygulanabilir ve sistemin daha uzun ömürlü olması incelenecektir [14].

Mühendislik güvenirliliği uygulamalarındaki en yaygın problemlerden biri, belirli bir performans hedefine ulaşabilmek için mevcut çeşitli seçenekler arasından belirli bir sistemin tasarımının seçilmesidir. Genel olarak amacımız, sistemimizin uzun ömürlü olmasıdır. Onarılabilir sistemlerdeki amaç, mümkün oldukça minimum kesinti durumu olan bir sistemin tasarımını tanımlamaktır. Düşük maliyetli ve en iyi performansı gösteren sistem, en önemli hedeflerden biridir. Bu düşüncenin amacı, bu tür sorunları nasıl formüle edip çözüm yolları aramaktır. Yaklaşımımız, nispeten yeni ortaya çıkan ‘‘sistem imzası’ ’düşüncesine dayanmaktadır. Yukarıda anlattığımız problemleri çözebilmek için iyi kurulmuş tutarlı sistemler teorisi bağlamında uygulamasını yapacağız ve bu problemlerin çözümüne yönelik, ikna edici kanıtlarla göstermeye çalışacağız [14].

T tutarlı bir düzen sistemini temsil etsin. Sistemin n bileşeninin yaşam sürelerinin bağımsız olduğunu ve F’ ye göre aynı şekilde dağılan, sürekli dağılım gösterdiğini varsayalım. T sistemini, basitçe s ile gösterelim ve i’ inci bileşen arızasının, sistemin başarısız olmasına neden olma olasılığına eşit olan n boyutlu bir olasılık vektörü olsun. Kısaca;

si= P(T=xi: n), burada T, sistemin başarısızlık zamanıdır ve xi: n, n bileşenli arıza zamanlarının i inci derece istatistiğidir, yani i ‘inci bileşen arızası zamanı olarak adlandırılır. İmza kavramı, belirli bir olasılık vektörü olarak tanımlanabilir. İmzalar, öncelikle sistem tasarımlarının karşılaştırılmasında kullanılacaktır. Farklı bileşen özelliklerine sahip iki sistem arasındaki bir karşılaştırılmanın yanıltıcı veya sonuçsuz olabileceğini unutmamak gerekiyor. Örneğin, son derece güvenilir dört bileşene sahip bir seri sistemin, nispeten zayıf bileşenlere sahip dört bileşenli bir paralel sistemden daha iyi bir performans göstereceği açık ve nettir. Seri sistemin bileşenlerinin sabit bir görev süresinin ötesinde dayanma olasılığı 0,9 ve bu görev zamanında güvenirliliği 0,6561, güvenirliliği 0,1 olan dört bileşene sahip paralel bir sistemin ise, 0,3439’dur. Bununla birlikte, genel olarak incelediğimizde paralel sistemlere göre seri sistemlerin tercih edildiği açık ve nettir. F’den alınan örnek, belirli bir imzaya sahip bir sistemin performansını incelemek için kullanılabilir. Son olarak şuna değinecek olursak, imzalar yalnızca gözlemlenen n başarısızlık süresinin permütasyon dağılımına bağlıdır ve temel dağılım gösteren F’ye bağlı değildir. Bu sebepten dolayı imza vektörü, bir sistemin tasarımının saf bir ölçüsü görülebilir. Bazı basit uyumlu sistemler için imza vektörünün hesaplanmasını inceleyeceğiz. Bu hesaplamaya bir örnek olarak, aşağıda gösterilen 3 bileşenli bir sistemi düşünelim. Bu sistemin, üç bileşenin X_1,X_2 ve X_3 arıza sürelerinin, 3!=6 olur ve bu 6 olası permütasyonu eşit derecede olası olduğunu varsayalım. Sistem arıza süresi T’nin ‘‘ sıra istatistikleri eş değeri’’ bileşen arıza sürelerinin her permütasyonu aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 3.1. Yapı işlevi $\phi^*(x) = x_1 (x_2 + x_3 - x_2x_3)$ olan 3 bileşenli bir sistem [15].

Yukarıdaki sistemin imza vektörü, s=(1/3,2/3,0) olur. 3 bileşenli uyumlu bir sistemin imzaları, (1,0,0), (0,1,0) ,(0,0,1), (1/3,2/3,0) ve (0,2/3,1/3) şeklindedir. Bu imzaların ilk 3'ü, i=1,2,3 için 3'den i çıkışlı sistem imzasına karşılık gelir. Beşincisi ise bir bileşenin diğer iki bileşendeki seri sistemle paralel olduğu sisteme paralel geldiği görülmüştür[15].

Bir mühendis, belirli bir işlevi yerine getirmek için bir sistem tasarlıyor ise, bu sistemi tasarlayabilmesi için iki temel gereksinime ihtiyaç duyacaktır. Birincisi, sistemin işleyişine göre sistemin çalışabilmesi için, sistemin üzerinde çalışmasını engelleyecek herhangi bir bileşenin olmaması sağlamak.

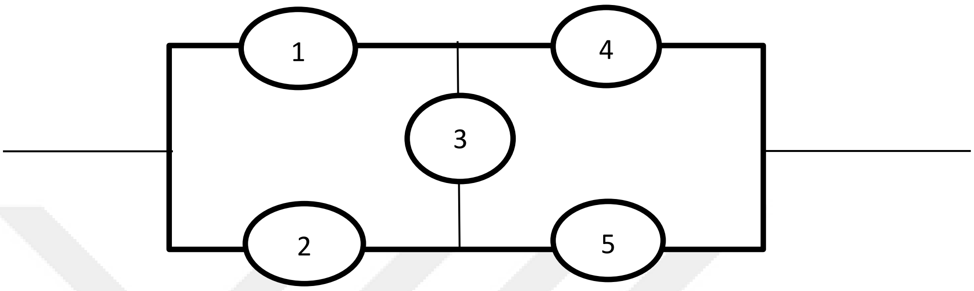
$(x_1,\ldots xi\text{-}1,a,xi+1,\ldots,xn)$ vektörü, $xi=a \in \{0,1\}$ olan rastgele seçilen bir sistemin n bileşeni için bir durum vektörünü temsil etsin. Eğer bir sistemin yapı fonksiyonu işlevi,

$\phi(x_1,\ldots xi\text{-}1,0,xi+1,\ldots xn)= \phi(x_1,\ldots xi\text{-}1,,1,xi+1,\ldots,xn)$ bütün olası değerleri için $(x_1,\ldots,xi\text{-}1,xi+1,\ldots,xn) \in \{0,1\}^{n-1}$ olur. Bir n bileşenli sistem alakasız bir bileşen içeriyor ise, aynı performansı sağlayabilen, daha basit bir sistem (n-1 den büyük olmayan) olduğundan, bu bileşen sistemden çıkarılır.

Arızalı bir bileşen çalışır durumdaki bir bileşenle değiştirilir ise, çalışma durumundan başarısız bir duruma değişen sistem gerçekten kafa karıştırıcı olacaktır. Aşina olduğumuz sistemlerin en başından olarak bilinen özelliği, arızalıları bazı bileşenlerin arızasıyla çakışmasıdır. Eğer bir sistemi zaman içinde izliyor olsaydık, bileşenler arızalanmaya başladığında sistemin bir süre daha çalışmaya devam edebileceğini, ancak sonunda çalışmayı sürdüren bileşenlerden birinin sistemde zamanla işlevsiz olduğunu ve sistemin işleyişi için kritik olduğunu kanıtlamış olacak ve bu bileşenin arızalanması durumunda sistem başarısız olacaktır. Arızalı bir bileşenin düzeltilmesi, sistemi yeniden çalıştırabilir. Fakat hiçbir durumda k çalışan bir bileşenin temelinde çalışırken, arızalı olan bir bileşeni çalışan bir bileşenle değiştirme eylemi sonucunda başarısız olan bir sistem görülmemiştir. Arızalı bir bileşeni onarmak sistemi daha da kötü duruma getirmez ise buna sistem monotonluğu denir. Sembolik olarak, bir monoton sistemin aşağıdakiler için yapı işlevi vardır:

$\phi(x) \leq \phi(y)$ $x \leq y$ olduğunda, burada ikinci vektör eşitsizliği bileşen bazında uygulanacağı anlaşılmıştır [15].

Uyumlu bir sistemin tasarımının alternatif bir özetine geçmeden önce, devamında önemli bir rol oynayan Birnbaum, Esary ve Saunders çerçevesinin ek bir unsuruna bakacağız. Tutarlı sistem, P kümesindeki tüm bileşenler çalıştığında çalışıyor ise buna P'nin bir yol kümesi olduğu söylenebilir. Tüm n bileşenlerden oluşan bir A kümesi bir yol kümesiyse, A'ya uygun bir alt küme olan B kümesi de bir yol kümesi olur. Buna minimum yol kümesi denir. Uyumlu bir sistemin minimum yol kümelerini $P_1,P_2,\ldots,Pr$ olarak gösterebiliriz.



Şekil 3.2. 5 bileşenli bir köprü sistemi[15]

Yukarıdaki Şekil 3.2. de ki köprü sistemini incelersek, minimum yol kümelerine bakıldığında {{1,4},{1,3,5,},{2,5},{2,3,4}}, bu kümelerden oluştuğunu görebiliriz. Minimum yol kümesi, diğerlerinin uygun bir alt kümesidir ve tüm minimum yol kümelerinin cebirsel birleşimi, sistemin tüm bileşenlerinin kümesidir. Minimum yol kümelerinin bu iki özelliği ile 1'den n'ye kadar olan her bileşen, en az bir minimum yol kümesinin bir öğesi olduğundan, her bileşenin alaka düzeyi garanti edilir. Minimum yol kümelerinin sabit koleksiyonlarını aşağıdaki gibi tartışabiliriz.

k bileşeni çalışmıyorsa ve sistem de çalışmıyorsa, yapı işlevi ϕ ya 0' a eşit kalacak ya da k bileşenini bir çalışan ile değiştirirsek 1'e yükselecektir. Diğer taraftan sistem çalışıyorsa, bileşenlerinin tümünde çalışan bir minimum P yol kümesi vardır. Bunun sonucu olarak {PU{k}} kümesinin bir yol kümesi olduğu ve k bileşeni çalışan bir bileşenle değiştirildiğinde sistemin yapı işlevi 1'e eşit kalacaktır. Belirli bir n sırasındaki tüm uyumlu sistemleri, minimum yol kümelerinin bu iki özelliğiyle tanımlamak mümkündür. 1'den n'e kadar her bileşen, en az bir minimum yol kümesinin öğesidir. Sistem imzasını incelerken, öncelikle minimum yol ve kesen kümelerini incelemek gerekmektedir. Ve sistemin tutarlı bir sistem olması gerekmektedir. Sistem imzası, seri sistem imzası, paralel sistem imzası, n-den k-çıkışlı-F sistem imzası, Ardışık n-den k-çıkışlı-F sistem imzası olmak üzere 4'e ayrılmaktadır[15].

Bu bölümde tutarlı sistemler teorisine giriş yapacak olursak, öncelikle bir sistem ve bileşenleri arasındaki yapısal ilişkileri incelenecektir. Daha sonra, bileşen güvenirliliği biliniyorsa eğer, sistem güvenirliliğine yönelik hesaplamalar gözden geçirilerek gerekli işlemler yapılır. Eğer aksi bir durum ortaya çıkmazsa, bileşenlerin durumunu temsil edebilmek için rastgele seçilen değişkenlerin bağımsız olacağı varsayılır. 1'den n'ye kadar ardışık olarak ifade edilen n bileşenli bir sistem düşünülürse, burada iki durum ortaya çıkar. Birincisi sistemin çalışma durumu, ikincisi ise sistemin çalışmama yani başarısız olma durumudur. Bu iki durum sistem için olduğu kadar bileşen için de geçerlidir[15]. İ'inci bileşenin durumunu belirtebilmek için, i bileşenine;

$$xi = \begin{cases} 1 & bileşen\ çalışır\ durumdaysa \\ 0 & bileşen\ arızalı\ durumdaysa \end{cases}$$

$$\Phi = \begin{cases} 1 & bileşen\ çalışır\ durumdaysa \\ 0 & bileşen\ arızalı\ durumdaysa \end{cases}$$

Varsayalım ki

$\Phi = \Phi(x)$

Burada $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, yani sistemin durumu tamamen bileşenlerin durumları tarafından belirlenir . $\Phi(x)$ fonksiyonu sistemin yapı fonksiyonu ya da basitçe yapı olarak adlandırılabilir[15].

xi , i'inci bileşenin belirli bir zamandaki durumunu temsil eden bir ikili rastgele değişken olsun, i=1,2,…,n.

pi= p(xi=1)

qi= q(xi=0)

$h = h(p) = P(\Phi(x) = 1)$

$g = g(q) = P(\Phi(x) = 0)$,

burada $p=(p_1,p_2,\ldots,pn)$, $q=(q_1,q_2,\ldots,qn)$ ve $x=(x_1,x_2,\ldots,xn)$.

Pi, i bileşeninin güvenirlik olasılığı, qi ise i bileşeninin güvenilmez olasılığı olarak adlandırılır ve h ile g, sisteme karşılık gelen güvenirlilik ve güvenilmezlik olarak adlandırılır[15].

Problem, bileşen güvenirliliği pi verildiğinde h sistem güvenirliliğini hesaplamaktır. Genel olarak, hesaplamanın başlangıç noktasının güvenilmezlik olmasına izin vermek daha verimli olacaktır.

h+q= 1 ve pi+qi=1 olduğuna dikkat edilsin.

Genel bir yapı için sistem güvenirliliğin hesaplanması için yöntemler sunmadan önce, bazı özel durumlara daha yakından bakacağız. Seri yapısıyla başlanılsın.

Örnek 11. (Bir seri yapının güvenirliliği).

Seri yapı için sistemin işleyişi, tüm bileşenlerin çalıştığı anlamına gelmektedir. Dolasıyla,

h= $P(\Phi(X) = 1) = P\left(\prod_{i=1}^{n} xi = 1\right)$

$= P(X_1 = 1, X_2 = 1,\ldots,Xn = 1)$

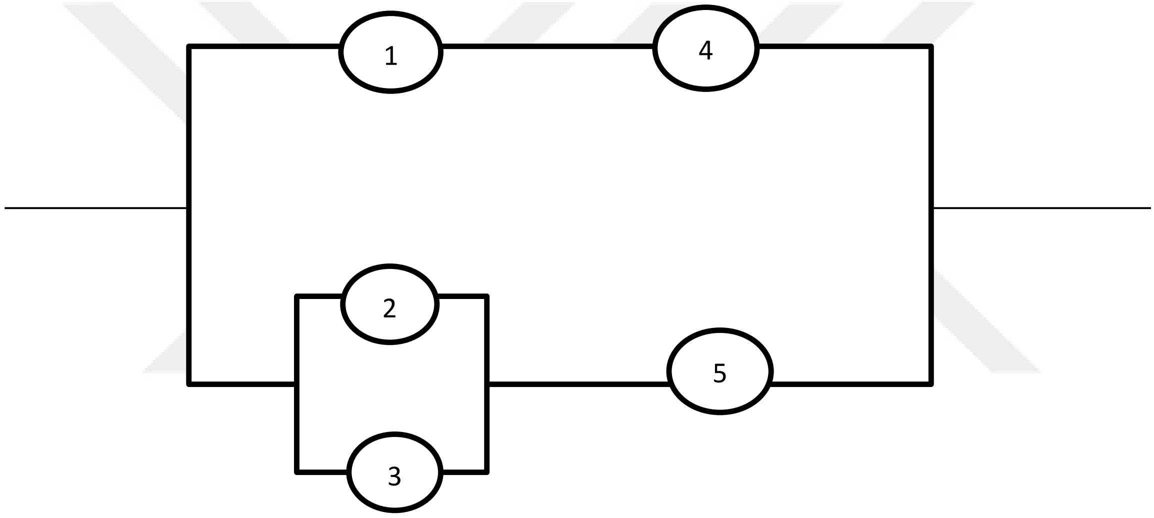
$= \left(\prod_{i=1}^{n} xi = 1\right) = \prod_{i=1}^{n} pi$.[16].

Örnek 12.(Paralel yapının güvenirliliği)

Paralel bir yapının güvenirliliği şu şekilde verilir:

h = $1- \prod_{i=1}^{n}(1 - pi) = \coprod_{i=1}^{n} pi$.[16]

Örnek 13.



Şekil 3.3. Güvenirlik Blok Şeması Örneği [16].

Şekil 3.3.'de gösterilen güvenirlik blok şeması düşünülsün. Sistemin minimum kesen kümeleri şunlardır : {1,5},{4,5},{1,2,3} ve {2,3,4}. Örneğin, {1,4,5}'in bir kesim seti olduğunu, ancak minimum olmadığını unutulmasın. Minimum yol kümeleri {1,4},{2,5}ve {3,5}'dir. Bu örnek ‘‘ 5 bileşenli örnek’’ olarak adlandırılacaktır[13]. Şekil 3.3.'deki güvenirlik blok şemasını tekrar düşünelim. Sisteme baktığımızda, 1 ve 4 bileşenlerini içeren yapı ve 2,3 ve 5 bileşenlerini içeren yapı iki bağımsız bileşenin paralel yapısı olarak görülmektedir. Önceki yapının sistem güvenirliliği, p_1 ve p_4'e eşitken, hâlbuki $(1-(1-p_2)(1-p_3))$ ise p_5'e eşittir. Böylece sistem güvenirliliği;

$$h= 1 - \{1 - p_1p_4\}\{1 - (1 - (1 - p_2)(1 - p_3))p_5\} \text{ olarak verilir.}$$

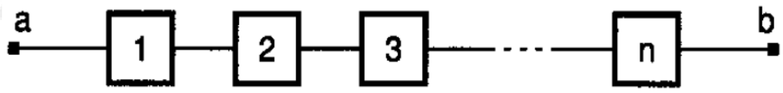
$q_1=q_2=q_3=0.02$ ve $q_4=q_5=0.01$ olduğunu varsayarsak, bu formül h=0.9997, yani $g=3.10^{-4}$ olur[16].

Eğer, örneğin aynı güvenirliğe sahip p, bağımsız bileşenlerden oluşan 2 den 3 çıkışlı bir sistem ise ve seri sistem halindeyse, toplam sistem güvenirliliği yukarıdaki gibi 2 bağımsız sistem aşağıdaki formül gibi birbirleriyle çarpılır ve birbirlerine eşit olur.

$$\binom{3}{2} p^2(1-p)+ \binom{3}{3}p^3(1-p)^0 =3p^2 (1-p) +p^3$$

Şimdi genel bir seri yapı düşünülsün. Karmaşık sistemler için sistem güvenirliliğini hesaplamak verimli bir algoritma yöntem kullanılmadığı sürece zorlu bir çözümleme olabilir. Bazı durumlarda uygulanamayabilir. Bu sebepten dolayı bu tür yöntemlerin geliştirilebilmesi için güvenirlilik teorisi alanında birçok araştırma yapılabilir. Genel olarak bir yapının güvenirliliğini hesaplayabilmek için birçok yöntem vardır. Bu yöntemlerin çoğu, minimum yol kümelerine dayanmaktadır. Daha küçük sistemler için sözde dahil etme- çıkarma metodu uygulanabilir. Fakat bu yöntem öncelikle çok güvenilir ya da güvenilmez olan sistemler için yaklaşık hesaplamalar için kullanılan bir yöntemdir. Sistem imzalarının incelenmesi, özellikle tutarlı sistemlere ve güvenirlilik teorisinin temeline dayanmaktadır[16].

3.1. Seri Sistem İmzası



Şekil 3.4. n boyutlu bir seri sistemin güvenilirlik blok diyagramı [13].

Bir sistemin çalışır durumda olması için gerek ve yeter şart n adet bileşeninin tamamının iyi bir performanslı olması halinde ise bu yapıya seri sistem adı verilir. Yani bir sistemin seri sistem olabilmesi için tüm bileşenlerinin çalışıyor olması gerekir. Seri sistemin yapı fonksiyonu,

$$\phi(x) = x1.x2\ldots xn = \prod_{i=1}^{n} xi$$

yukarıdaki gibi gösterilmektedir. Şekil 6'da görselleştirilen a ile b istasyonları arasındaki iletişimin kopmaması durumunda, sistem çalışmaya devam edecektir. Bu iletişimin devam etmesi için de sistemdeki tüm istasyonların arızalanmaması gerekir [14].

s (s_1,s_2,..s_n) seri bir sisteminin imzası olsun. Burada s_1=1 diğer elemanları $s = (1, 0, \ldots ,0)$

Örnek 14.

5 bileşenli bir seri sisteminin imzası s=(1,0,0,0,0) şeklindedir.

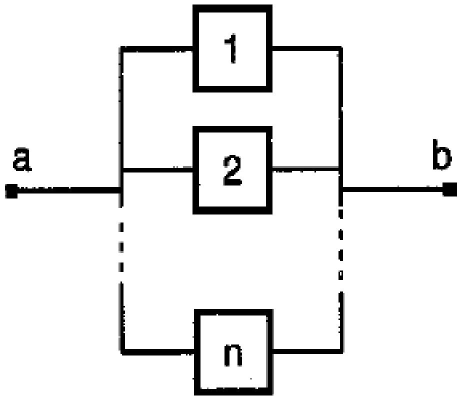
Örnek 15.

4 bileşenli bir seri sistemin imzası s=(1,0,0,0) şeklindedir.

Örnek 16.

3 bileşenli bir seri sistemin imzası s=(1,0,0) şeklindedir.

3.2. Paralel Sistem İmzası



Şekil 3.5. n boyutlu bir paralel sistemin güvenilirlik blok diyagramı [13].

Bir sistemin çalışması için gerek ve yeter şart n tane bileşenden herhangi birinin çalışmaya devam etmesi durumunda ise bu yapı paralel sistem olarak adlandırılır. Yani bir sistemde sadece bir bileşen bile çalışıyorsa paralel sistemimiz çalışır vaziyette olur. Paralel sistemin fonksiyonu

$$\phi(x) = 1 - (1 - x1)(1 - x2) \ldots (1 - xn) = \prod_{i=1}^{4}(1 - xi)$$

şeklinde yazılır. Yukarıdaki denklemde eşitliğin yanındakinin yerine $\coprod_{i=1}^{n} xi$ şeklinde yazılır.

Burada $\coprod$ ‘’ip’’ diye okunur. 2 boyutlu paralel yapının fonksiyonu,

$$\phi(x1, x2) = 1 - (1 - x1).(1 - x2) \; = \coprod_{i=1}^{2} xi$$

şeklinde ifade edilir. Yukarı denklemin eşitliğinde, sağ tarafı ayrıca $x_1 \sqcup x_2$ şeklinde yazmak da mümkündür. Yukarı denklemin eşitliği,

$$\phi(x1, x2) = x1 + x2 - x1x2$$

şeklinde yazılabilir. Burada x_1 ve x_2 ikili değişkenler olduğundan, $x_1 \sqcup x_2$ ifadesi x_i'lerin maksimumuna eşit olacaktır. Bu durum,

$$\coprod_{i=1}^{n} xi = \max xi$$

i=1,2…n

eşitliği ile de gösterilebilmektedir [14].

Paralel bir sistemin imzası S=(s_1,s_2…,s_n) olmak üzere burada s_n=1 diğer elemanlar sıfıra eşittir. Yani

$$s = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1\ tane}, 1)$$

Örnek 17.

Dört bileşenli bir paralel sistemin imzası

S=(0,0,0,1)

şeklindedir.

Örnek 18.

Üç bileşenli bir paralel sistemin imzası

S=(0,0,1)

şeklindedir.

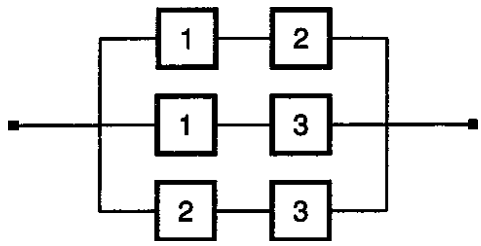
Örnek 19.

Beş bileşenli bir paralel sistemin imzası

S=(0,0,0,0,1)

şeklindedir.

3.3. *n*-den *k* Çıkışlı *F* Sistem İmzası

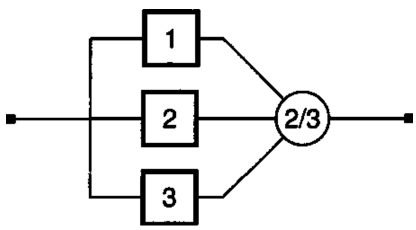


Şekil 3.6. *3*-den *2* çıkışlı sistem [16].

Bir sistem, ancak ve ancak n tane bileşeninden en az k tanesi arızalı durumdayken arızalanıyorsa bu sisteme n-den k-çıkışlı-F sistem olarak adlandırılır. Bu tanıma göre; n-den 1 çıkışlı F sisteme seri sistem ve n-den n çıkışlı sisteme ise paralel sistem karşılık gelir. Bir n-den k çıkışlı F sistemin fonksiyonu,

$$\phi(\mathrm{x}) = \begin{cases} 0, & \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k \\ 1, & \sum_{i=1}^{n} x_i < k \end{cases}$$

şeklinde yazılmaktadır. Mesela, Şekil 3.6.'da gösterilen *3*-den *2* çıkışlı sisteminde herhangi bir bileşenin arızalanması sistemi etkilemez fakat iki ya da daha fazla bileşen bozulduğunda sistem de arızalanmış olur. *3*-den *2* çıkışlı sistemin güvenilirlik yapısı ayrıca Şekil 3.6.'daki gibi de görselleştirilebilir. Dolayısıyla genel olarak Şekil 3.7.'deki gösterim kullanılmaktadır.



Şekil 3.7. *3*-den *2* çıkışlı sistem için alternatif gösterim[16]

n den t çıkışlı F sisteminin imzası

$s=(s_1,s_2\ldots,s_n)$

ile gösterilsin. Burada $s_k= 1$ diğer elemanlar sıfıra eşittir[16].

Örnek 20.

6 dan 3 çıkışlı F sistemin imzası

S=(0,0,1,0,0,0) şeklindedir.

Örnek 21.

5 den 2 çıkışlı F sistemin imzası

S=(0,1,0,0,0)

şeklindedir.

3.4. Ardışık *n*-den *k* çıkışlı *F* Sistem İmzası

n bileşenden oluşan bir sistemin arızalı durumda olabilmesi için bileşenlerden ardışık olarak en az "*k*" tanesinin arızalı olması gerekiyorsa bu tür sistem ardışık *n*-den k çıkışlı *F* sistem olarak adlandırılır. Örneğin; "1" ile bileşenin çalışır durumda, "0" ile bozulmuş olduğu düşünülecek olursa durumları aşağıdaki gibi verilen sistemi göz önüne alalım.

0 1 0 0 1

Eğer bu sistem *5*-den *3* çıkışlı bir yapıda ise sistem çalışmamakta, ardışık *5*-den *3* çıkışlı bir yapıda ise çalışmaktadır. Çünkü ardışık *5*-den *3* çıkışlı bir sistemin arızalı durumda olabilmesi için üst üste en az 3 bileşenin arızalı durumda olması gerekmektedir.

Yukarıda tanımı verilen sistem literatürde ardışık *n*-den *k* çıkışlı: *F* sistem olarak bilinmektedir. İlgili sistemin bu şekilde isimlendirilmesi, sistemin arızalanma prensibi üzerine kurulmuş olmasından kaynaklanmaktadır. Bir de ardışık *n*-den *k* çıkışlı: *F* sistem olarak adlandırılan sistemler mevcuttur.

Böyle bir sistem; çalışma prensibi üzerine kurulmuş olup *n* bileşenden oluşan sistemin çalışması için art arda *k* adet bileşenin çalışması olması gerekmektedir.

Ardışık *n*-den *k* çıkışlı sistemler ve bu sistemlerin genel halleri ile mühendislik uygulamalarında sıklıkla karşılaşılmaktadır. Örneğin *n* adet bağlantı noktasından oluşan bir mühendislik yapısının (petrol boru hattı) çalışabilmesi için ardışık *k* adet bağlantı noktasının sağlam durumda olması ilgili sistemin ardışık *n*-den *k* çıkışlı yapıda modellenmesini gerektirir.

Birçok sistemin analiz edilmesi sürecinde olduğu gibi; ardışık *n*-den *k* çıkışlı sistemlerin analizi de temel olarak aşağıdaki çalışmaların yapılmasını kapsamaktadır:

- Sistemi karakterize eden yapı fonksiyonunun ortaya konulması
- Sisteme ilişkin güvenilirlik fonksiyonunun elde edilmesi

- Sistemin yaşam süresinin dağılımının elde edilmesi ve bu dağılım yardımıyla sistemin ortalama yaşam süresinin belirlenmesi

Doğrusal sıralanmış aynı dağılımlı ve bağımsız bileşenlerden oluşan ardışık *n*-den *k* çıkışlı *F* sisteminin imzası $S_L = (s_{1:L}, s_{2:L}, \ldots, s_{n:L})$ olmak üzere

$$S_{J:L} = \frac{NL(j-1,k,n)}{\binom{n}{n-j+1}} - \frac{NL(j,k,n)}{\binom{n}{n-j}}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $N_L(j, k, n)$; *n* tane doğrusal sıralanmış bileşenin *j* tanesi arızalı iken en az *k* tane arızalı bileşen art arda gelmeyecek şekilde farklı dizilimlerin sayısını ifade etmektedir [17].$N_L(j, k, n)$ sayısı

$$N_L(j, k, n) = \sum_{i=0}^{\min([\frac{j}{k}],n-j+1)} (-1)^i \binom{n-j+1}{1}\binom{n-jk}{n-j}, \qquad 0 \le j \le n ,$$

ile elde edile bilinir. Burada $[x]$ ifadesi x' in tam kısmıdır.

Benzer şekilde; dairesel sıralanmış aynı dağılımlı ve bağımsız bölümlerden oluşan ardışık *n*-den *k* çıkışlı *F* sisteminin imzası $S_c = (s_{1:C}, s_{2:C}, \ldots, s_{n:C})$ olmak üzere ;

$$S_{j:C} = \frac{Nc(j-1,k,n)}{\binom{n}{n-j+1}} - \frac{Nc(j,k,n)}{\binom{n}{n-j}}$$

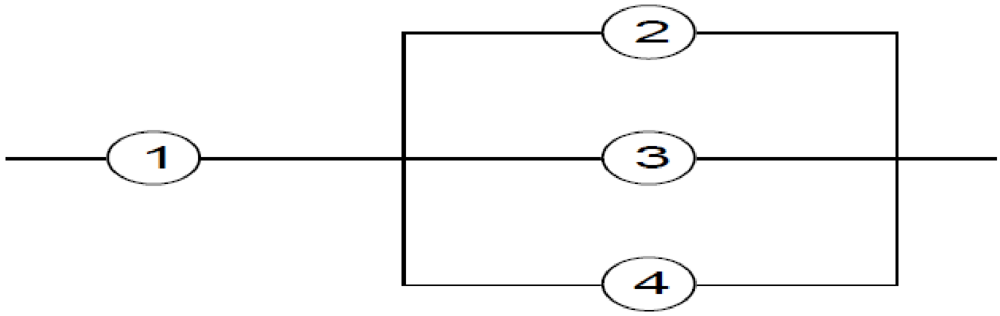
ile ifade edilir. Burada $N(j, k, n)\ L$; *n* tane doğrusal sıralanmış bölümün j tanesi arızalı iken en az *k* tane arızalı bölümün art arda gelmeyecek şekilde farklı dizilimlerin sayısını ifade etmektedir[17]. $N(j,k,n)$ sayısı

$$N_c(j,k,n) = \frac{n}{n-j} N_L(j,k,n-1), \qquad 0 \le j < n,$$

şeklinde elde edile bilinir[17].

3.5. Uygulamalar

Örnek 22.



Şekil 3.8. 4 boyutlu ϕ_1 sistemi [18].

Şekil 3.8. de 4 bileşenden oluşan ϕ_1 sistemini göz önüne alalım. Bu sistemin, kesme kümeleri kümesi K={{1},{2,3,4}} olduğundan yapı fonksiyonu

$$\begin{aligned} \phi1(t1,t2,t3,t4) &= minmaks\ Ki \\ &= min\,\{t1, maks\{t2,t3,t4\}\} \\ &= min\,\{t1, 1-(1-t2)(1-t3)(1-t4)\} \\ &= t1\{1-(1-t2)(1-t3)(1-t4)\} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Minimum ve maksimum operatör yardımıyla T'nin hangi sıralı istatistiğe eşit olduğu, Çizelge 3.1'de belirtilmiştir.

$P(T=T1:4) = n\,(T=T1:4)/\,4! = 6/24$

$P(T=T2:4) = n(T=T2:4)/4! = 6/24$

$P(T=T3:4) = n(T=T3:4)/4! = 12/24$

$P(T=T4:4) = n(T=T4:4)/4! = 0/24$ elde edilir.

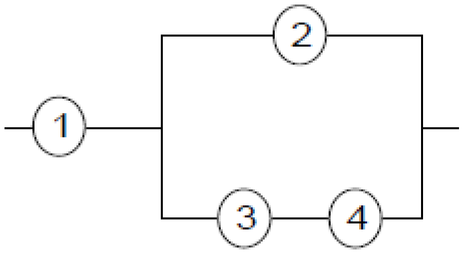
Dolayısıyla, sistemin imzası,

$S1 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0\right)$ olarak elde edilir[18].

ÇİZELGE 3. 1. 4 boyutlu ϕ_1 sistemi sıra istatistikleri çizelgesi [18]

$T_{i1}<T_{i2}<T_{i3}<T_{i4}$	$T_i=T_{i:4}$
$T_1<T_2<T_3<T_4$	$T_1=T_{1:4}$
$T_1<T_2<T_4<T_3$	$T_1=T_{1:4}$
$T_1<T_3<T_2<T_4$	$T_1=T_{1:4}$
$T_1<T_3<T_4<T_2$	$T_1=T_{1:4}$
$T_1<T_4<T_2<T_3$	$T_1=T_{1:4}$
$T_1<T_4<T_3<T_2$	$T_1=T_{1:4}$
$T_2<T_1<T_3<T_4$	$T_1=T_{2:4}$
$T_2<T_1<T_4<T_3$	$T_1=T_{2:4}$
$T_2<T_3<T_1<T_4$	$T_1=T_{3:4}$
$T_2<T_3<T_4<T_1$	$T_4=T_{3:4}$
$T_2<T_4<T_1<T_3$	$T_1=T_{3:4}$
$T_2<T_4<T_3<T_1$	$T_3=T_{3:4}$
$T_3<T_1<T_2<T_4$	$T_1=T_{2:4}$
$T_3<T_1<T_4<T_2$	$T_1=T_{2:4}$
$T_3<T_2<T_1<T_4$	$T_1=T_{3:4}$
$T_3<T_2<T_4<T_1$	$T_4=T_{3:4}$
$T_3<T_4<T_1<T_2$	$T_1=T_{3:4}$
$T_3<T_4<T_2<T_1$	$T_2=T_{3:4}$
$T_4<T_1<T_2<T_3$	$T_1=T_{2:4}$
$T_4<T_1<T_3<T_2$	$T_1=T_{2:4}$
$T_4<T_2<T_1<T_3$	$T_1=T_{3:4}$
$T_4<T_2<T_3<T_1$	$T_3=T_{3:4}$
$T_4<T_3<T_1<T_2$	$T_1=T_{3:4}$
$T_4<T_3<T_2<T_1$	$T_2=T_{3:4}$

Örnek 23.



Şekil 3.9. 4 boyutlu ϕ_2 sistemi [18].

Şekil 3.9'daki 4 boyutlu ϕ_2 sistemini göz önüne alalım. Bu sistemin, minimal başarı yol kümeleri kümesi P={{1,2},{1,3,4}} olduğundan yapı fonksiyonu

$$\Phi 2\ (x1, x2, x3, x4) \ = \ maksmin\ Pi$$
$$1 \leq i \leq 2i\ Pi\ €P$$
$$= \ maks\ \{min\{x1, x2\}, min\{x1, x3, x4\}\} \qquad (4.1)$$
$$= \ maks\ \{x1x2, x1x3x4\}$$
$$= \ 1 - (1 - x1x2)(1 - x1x3x4)$$
$$= \ x1\{x2 + x3x4 - x2x3x4\}$$
$$= \ x1\{1 - (1 - x2) + x3x4(1 - x2)\}$$
$$= \ x1\{1 - (1 - x2)(1 - x3x4)\}$$
$$= \ min\{x1, maks\{x2, min\{x3, x4\}\}\} \qquad (4.2)$$

olarak elde edilir. Bu sistemin yaşam süresi T olmak üzere, (4.1) veya (4.2) özdeş olma durumu kullanılarak T' nin hangi sıralı istatistiğe eşit olduğu, Çizelge 3.2'de belirtilmiştir.

Çizelge 3.2' den

$$P(T = T1{:}\,4) \ = \ n\ (T = T1{:}\,4)/4! = 6/24$$
$$P(T = T2{:}\,4) \ = \ n(T = T2{:}\,4)/4! = 14/24$$
$$P(T = T3{:}\,4) = \ n(T = T3{:}\,4)/4! = 4/24$$
$$P(T = T4{:}\,4) = \ n(T = T4{:}\,4)/4! = 0/24$$

ve dolayısıyla, ϕ_2 sisteminin imzası $s_2 = (\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{1}{6}, 0)$ olarak elde edilir [18].

ÇİZELGE 3.2. 4 boyutlu ϕ_2 sistemi sıra istatistikleri çizelgesi [18]

$T_{i1}<T_{i2}<T_{i3}<T_{i4}$	$T_i=T_{i:4}$
$T_1<T_2<T_3<T_4$	$T_1=T_{1:4}$
$T_1<T_2<T_4<T_3$	$T_1=T_{1:4}$
$T_1<T_3<T_2<T_4$	$T_1=T_{1:4}$
$T_1<T_3<T_4<T_2$	$T_1=T_{1:4}$
$T_1<T_4<T_2<T_3$	$T_1=T_{1:4}$
$T_1<T_4<T_3<T_2$	$T_1=T_{1:4}$
$T_2<T_1<T_3<T_4$	$T_1=T_{2:4}$
$T_2<T_1<T_4<T_3$	$T_1=T_{2:4}$
$T_2<T_3<T_1<T_4$	$T_3=T_{2:4}$
$T_2<T_3<T_4<T_1$	$T_3=T_{2:4}$
$T_2<T_4<T_1<T_3$	$T_4=T_{2:4}$
$T_2<T_4<T_3<T_1$	$T_4=T_{2:4}$
$T_3<T_1<T_2<T_4$	$T_1=T_{2:4}$
$T_3<T_1<T_4<T_2$	$T_1=T_{2:4}$
$T_3<T_2<T_1<T_4$	$T_2=T_{2:4}$
$T_3<T_2<T_4<T_1$	$T_2=T_{2:4}$
$T_3<T_4<T_1<T_2$	$T_1=T_{3:4}$
$T_3<T_4<T_2<T_1$	$T_2=T_{3:4}$
$T_4<T_1<T_2<T_3$	$T_1=T_{2:4}$
$T_4<T_1<T_3<T_2$	$T_1=T_{2:4}$
$T_4<T_2<T_1<T_3$	$T_2=T_{2:4}$
$T_4<T_2<T_3<T_1$	$T_2=T_{2:4}$
$T_4<T_3<T_1<T_2$	$T_1=T_{3:4}$
$T_4<T_3<T_2<T_1$	$T_2=T_{3:4}$

4.SONUÇ

Geniş ve garip bir nesne uzayını, daha basit bir uzay indeksine karakterize ederek analizi kolaylaştırmak için en uygun yöntemler uygulanmıştır. En azından rasyonel çözümlerin tanımlanabilmesi için istatistikçiler, ham veriden tesadüfi olarak örneklem seçerek olasılık ya da istatistiksel anlamda birçok analizle problemi çözümlemişlerdir. İlgili modelin bilinmeyen özellikleri hakkında bilgi kaybını önlemek için basit bir özet ölçüye indirebilmek, belki de bu olgunun en önemli örneğidir. Doğrusal model teorisinde, boyut indirgeme ile ilgili olarak da amaç, bilgi kaybı olmaksızın bu tür bir azaltma olasılığı ile de sonuç almak mümkündür. Sistem imzasının teori ve uygulamaları da bu şekilde düşünülebilir. Bazı sistemler çok boyutlu olabilir. Bu sistemlerdeki arıza ya da çalışma olasılığı hesaplayabilmek için istatistiksel yöntemler uygulanarak da doğru sonuçlara ulaşılabilir. Bir sistemin imzası, o tasarımın karakteristik özelliklerini almaktadır. Özellikle, bileşenler bağımsız olduğunda bileşen arızalarının, sistem arızalarını nasıl etkilediğini ölçer. Ve aynı ömür dağılımına sahiptir. Daha önce de belirtildiği gibi, bileşenlerin teorik performansı ve bu alanda değerlendirilmesi, kişinin sadece sistem tasarımına odaklanmasına izin verilir. İmzalar, yalnızca ilgili sistemin tasarımı hakkında bilgi sağlamaktadır. Yapısal Güvenirlilik alanındaki araçları uygun olarak sınıflandırarak, belirleyici önlemler alınabilir.

Belirli bir sistemin tasarımı için, bir imza vektörünün kullanılma kaybolan bilgilerle ilgili olarak, belirtilmesi gereken iki kayıp bilgi kaynağı bulunmaktadır. Birincisi, sistemler ve imzalar arasında bire bir yazışmanın olmaması varsayılabilir. Örneğin, sadece 17 farklı imza arasında, 4. dereceden 20 farklı tutarlı sistem vardır. Bileşen ömürleri, her bir rastgele değişkeni diğerleriyle aynı olasılık dağılımına sahipse ve aynı şekilde dağılmışsa, aynı ömür dağılımına sahip üç adet 4. dereceden sistem çifti bulunmaktadır. Eğer bir bileşen bile gevşetilir ya da değiştirilirse, 20 sistemin de yaşam boyu dağılımı farklı olacaktır. İkinci olarak ise, genellikle gerçek sistemin bileşenlerinin ömür dağılımları makul olarak özdeş kabul edilemez. Bileşen ömürlerinin bağımsızlığı, daha düşük ihtimalli bir varsayımdır. Fakat sıkıştırma, aşınma veya erken arızalar nedeniyle bileşenlerin bağımlı olması ortaya çıkabilir. Karşılaştırabilmek için, hem bağımsızlığı hem de aynı şekilde dağılmış sistemleri gevşeterek, bu monografta geliştirilen bazı analiz türleri ile nihai hedef görülebilir.

Sonuç olarak sistem imzalarının temelini, sistem güvenirliliği, bileşen ömürleri ve tutarlı sistemler oluşturmaktadır. Sistem imzaları, 2. Dünya savaşında kullanılan uçakların dayanıklılığı ve ömürlerinin incelenmesiyle ortaya çıkmıştır. Birçok istatistikçi ve matematikçinin öne sürdüğü teoremler ve yöntemler, bize bazı sonuçları göstermiştir. Bir ürünün dayanıklılığını ve uzun ömürlülüğünü inceleyebilmek için, sıra istatistikleri, güvenirlilik teorisi ve hata zamanları incelenerek, istatistiksel yöntemlerle analiz edilebilir. Bu analizler sonucunda görüldüğü gibi, 2. Dünya savaşından sonraki uçaklar ve bazı makinalar daha sağlam, güvenilir ve uzun ömürlü olmuşlardır. Bazı bilim adamlarının bu tespitleri sonucunda örneğin, 2. Dünya savaşının seyri ve sonucu değişmiştir. Özellikle sanayi devriminden sonra sanayileşmenin ve teknolojinin hızla gelişmesiyle dünyada bazı dengelerin ve düzenin değiştiği görülmektedir. İki asır boyunca teknolojinin bu kadar gelişmesiyle üretilen bazı makinaların ve üretilen ürünlerin ömürleri ve dayanıklıları büyük önem kazanmıştır. Bu noktada mühendislere ve matematikçilere büyük iş düşmüştür. Üretilen herhangi bir ürünün hem uzun ömürlü hem de dayanıklı olması için istatistikçiler hata oranlarını ve hata zamanlarını incelemişlerdir. Yapılan bazı istatistiksel hesaplamalar ile ürünlerin daha dayanıklı ve uzun ömürlü çalışması amaçlanmıştır. Daha sonraki yıllarda teknolojik ve endüstriyel açıdan sistem imzası teorisi daha da büyük önem kazanmıştır.

5. KAYNAKLAR

[1] Barlow RE, Proschan, F, 1975. Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models. Holt, Rinehart and Winston, Inc. New York.

[2] Rausand M, Hoyland A, 2004. System Reliability Theory: Models, Statistical Methods, and Applications, John Wiley&Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, s: 118-133.

[3] Kuo W, Zuo M, 2003. Optimal Reliability Modeling: Principles and Applications, John Wiley&Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.

[4] Samaniego FJ, 2007. System Signatures and Their Applications in Engineering Reliability, Springer Science+Business Media, LLC, New York.

[5] Samaniego FJ, 1985. On Closure the IFR Class Under Formation of Coherent Systems.IEEE Trans. Reliab. Theory, 34: 69-72.

[6] Kochar S, Mukerjee H, Samaniego FJ, 1999. The "Signature" of a Coherent System and Its Application to Comparisons Among Systems, Naval Research Logistic, 46: 507-523.

[7] Navarro J, Ruiz JM, Sandoval CJ, 2005. A Note on Comparisons among Coherent Systems with Dependent Components Using Signatures, Statistics and Probability Letters, 72: 179-185.

[8] Navarro J, Samaniego FJ, Balakrishnan N, Bhattacharya D, 2008. On the Application and Extension of System Signatures in Engineering Reliability, Naval Research Logistic, 55: 313-326.

[9] Da G, Zheng B, Hu T, 2012. On Computing Signatures of Coherent Systems, Journal of Multivariate Analysis, 103: 142-150.

[10] Marichal JL, Mathonet P, 2013. Computing System Signatures through Reliability Functions, Statistics and Probability Letters, 83: 710-717 .

[11] Reiss RD, 1989. Approximate distributions of order statistics. Springer.Verlag.New York.

[12] Sağlam V, Sağır M, Yücesoy E, 2016.Olasılığa Giriş, Ankara.

[13] Hoyland A, Rausand M, 2002. System Reliability Theory Models, Statistical Methods and Applications Second Edition, New Jersey: John Wiley & Sons, INC., Publication.

[14] Aven T , Jensen U, 1999. Stochastic models in reliability,New York: Springer.

[15] Samaniego FJ, 2007. System Signatures and Their Applications in Engineering Reliability, Springer Science+Business Media, LLC, New York.

[16] Hoyland A, Rausand M, 2002. System Reliability Theory Models, Statistical Methods and Applications Second Edition, New Jersey: John Wiley & Sons, INC., Publication,s.149-151.

[17] Boland PJ, 2001 Signatures of indirect majority systems, Journal of Applied Probability, 38(2): 597–603.

[18] Bulut Y, Yaman H, 2014. Aynı boyutlu tutarlı sistemlerin sistem imzası ile karşılaştırılması, Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 30(4):300-307.

ÖZGEÇMİŞ

Muhammet HALİSDEMİR