T.C.

BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ ve MUŞ ALPARSLAN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YEREL KATI RİESZ UZAYLARINDA BAZI İDEAL YAKINSAKLIK ÇEŞİTLERİ

Ergin GENÇ

AĞUSTOS 2018

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

YEREL KATI RİESZ UZAYLARINDA BAZI İDEAL YAKINSAKLIK ÇEŞİTLERİ

Hazırlayan
Ergin GENÇ

Danışman
Doç. Dr. Şükran KONCA

Jüri Üyeleri
Prof. Dr. Harun POLAT
Doç. Dr. Zafer ŞİAR
Doç. Dr. Hamit MİRTAGİOĞLU
Doç. Dr. Murat KARAKAŞ
Doç. Dr. Şükran KONCA

AĞUSTOS 2018

Ergin GENÇ tarafından hazırlanan **"Yerel Katı Riesz Uzaylarında Bazı İdeal Yakınsaklık Çeşitleri"** adlı tez çalışması 09 / 08 / 2018 tarihinde yapılan sınavla aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Prof. Dr. Harun POLAT (Başkan)	
Doç. Dr. Şükran KONCA (Danışman)	
Doç. Dr. Zafer ŞİAR (Üye)	
Doç. Dr. Hamit MİRTAGİOĞLU (Üye)	
Doç. Dr. Murat KARAKAŞ (Üye)	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 18 / 09 / 2018 gün ve 42 / 26 Sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Koray KÖKSAL
Enstitü Müdürü

ÖZET

YEREL KATI RİESZ UZAYLARINDA BAZI İDEAL YAKINSAKLIK ÇEŞİTLERİ

Ergin GENÇ

Yüksek Lisans Tezi

Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Şükran KONCA
Ağustos 2018, 60 sayfa

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde yerel katı Riesz uzaylarından kısaca bahsedilmiş olup, ikinci bölümde konuyla ilgili literatür taraması yapılmıştır. Üçüncü bölümde, bazı temel kavramlara ve tanımlara yer verilmiştir. Tezin orijinal kısmını oluşturan dördüncü bölüm ise üç kısma ayrılmaktadır. Dördüncü bölümün ilk kısımında, toplanabilme teorisindeki ideal tanımı ile cebirdeki Boole halkası yardımıyla tanımlanan ideal tanımının birbirine denk olduğu gösterilmiştir. Dördüncü bölümün ikinci kısmında yerel katı Riesz uzaylarında $I-$ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsaklık tanımlanarak bazı kapsama bağıntıları verilmiş ve bazı topolojik özellikler incelenmiştir. Dördüncü bölümün üçüncü kısmında ise yerel katı Riesz uzaylarında çift indisli dizilerin $I-$istatistiksel yakınsaklığı ve $I-$lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramları bir “ g ” ağırlık fonksiyonu yardımıyla tanımlanarak bazı kapsama bağıntıları incelenmiştir. Son bölüm olan beşinci bölümde ise elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

Anahtar kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık, İdeal yakınsaklık, $I-$ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsaklık, Yerel katı Riesz uzayları.

ABSTRACT

SOME TYPES OF IDEAL CONVERGENCE IN LOCALLY SOLID RIESZ SPACE

Ergin GENÇ

Master Thesis

Bitlis Eren University Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics,
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Şükran KONCA

August 2018, 60 pages

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, the local solid Riesz spaces are briefly mentioned and in the second chapter, the related literature is investigated. In the third chapter, some basic concepts and definitions are given. The fourth chapter, where the original results of the thesis are given, is divided into three part. In the first part of fourth chapter, it has been shown that the notion of ideal in summability theory and the ideal which is defined by the Boolean ring in algebra are equivalent concepts. In the second part of fourth chapter, the concept of $I-$weighted lacunary statistical convergence in locally solid Riesz space is defined, some inclusion relations are given and some topological properties of the related space are investigated. In the third part of the fourth chapter, the notions of $I-$statistical convergence and $I-$lacunary statistical convergence of double sequences defined by weight function g in a locally solid Riesz space are introduced and some inclusion relations are investigated. In the last chapter, the results obtained are evaluated.

Keywords: Statistical convergence, Ideal convergence, $I-$weighted lacunary statistical convergence, Locally solid Riesz space.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana her konuda yardımcı olan, sahip olduğu bilgi-birikim ve tecrübelerini bana aktararak kendimi geliştirmemi sağlayan saygıdeğer hocam Sayın Doç. Dr. Şükran KONCA'ya ve onun vesilesiyle tanışma fırsatı yakaladığım, matematiğe bilhassa hayata olan bakış açıma farklı bir pencere açan Sayın Dr. Joao Cabral'a ve tezin ilgili kısmında kendisinden fikir aldığım hocam Sayın Doç. Dr. Yılmaz Durğun'a çok teşekkür eder saygılarımı sunarım. Ayrıca lisans döneminde üzerimdeki emeklerinden dolayı tüm hocalarıma, desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen dostlarım Ahmet ŞAHİN'e ve A. Kerim SERBEST'e ve tüm değerli arkadaşlarıma, hayatımın her anında yanımda olarak desteklerini esirgemeyen, varlıklarından güç aldığım biricik aileme sonsuz teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
w	Reel veya kompleks terimli tüm dizilerin uzayı
c	Reel veya kompleks terimli tüm yakınsak dizilerin uzayı
c_0	Reel veya kompleks terimli sıfıra yakınsak tüm dizilerin uzayı
l_∞	Reel veya kompleks terimli tüm sınırlı dizilerin uzayı
$\lvert A\rvert$	A kümesinin kardinalitesi
2^X	X kümesinin kuvvet kümesi
$\bar{\delta}(A)$	A kümesinin üst yoğunluğu
$\underline{\delta}(A)$	A kümesinin alt yoğunluğu
$\wedge$	infumum
$\vee$	supremum
x^+	x in pozitif kısmı $\left(x^+ = x \vee \theta\right)$
x^-	x in negatif kısmı $\left(x^+ = (-x) \vee \theta\right)$
$\lvert x\rvert$	x in mutlak değeri $\left(\lvert x\rvert = x \vee (-x)\right)$
S	Tüm istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
S_θ	Tüm lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
$S_{(\bar{N},\theta)}$	Tüm ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
I	İdeal
I_{fin}	Sonlu ideal
F	Filtre
S_θ^I	Tüm $I-$lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
$S_{(\bar{N},\theta)}^I$	Tüm $I-$ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi

1. GİRİŞ

Kısmi sıralı vektör uzaylarının özel hali olan Riesz uzayları, örgü (latis) yapısı taşıyan vektör uzaylarıdır [1]. Riesz uzayları aynı zamanda vektör örgüsü olarak adlandırılır. Riesz'in bu çalışmasından sonra diğer birçok araştırmacı bu kavrama ilişkin çeşitli çalışmalarda bulunmuşlardır. Riesz uzaylarının ölçüm teorisi, operatör teorisi ve optimizasyon gibi birçok alanda uygulamaları mevcuttur. Ayrıca bu uzayların, ekonomi alanında da bazı önemli uygulamaları bulunmaktadır [2].

Bir vektör uzayı üzerinde toplama ve skaler çarpma işlemlerinin sürekli olduğu topolojiye lineer topoloji denir. Bir lineer topoloji ile donatılan bir vektör uzayına topolojik vektör uzayı denir. Katı kümelerden oluşan sıfırın bir komşuluk tabanına sahip olan bir lineer topoloji ile donatılmış Riesz uzayına ise bir yerel katı Riesz uzayı denir.

İstatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak 1951 yılında tanımlanmıştır. İstatistiksel yakınsaklık özetle istatistiksel limit noktasının komşulukları dışında kalan dizinin terimlerinin indislerinin oluşturduğu kümenin doğal yoğunluğunun sıfır olması koşuluna dayanmaktadır. Bu koşul analizdeki bildiğimiz yakınsaklığa göre daha zayıf bir koşuldur. Klasik anlamda yakınsak olan bir dizi aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır. Klasik anlamdaki yakınsaklığı ve istatistiksel yakınsaklığı içinde bulunduran ve doğal sayılar üzerindeki idealleri kullanarak ideal yakınsaklık ($I-$yakınsaklık) kavramı, Kostyrko [3] tarafından 2000 yılında tanımlanmıştır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Klasik anlamdaki yakınsaklığa alternatif olarak günümüze kadar çok sayıda yakınsaklık tipi tanımlanmış ve bu kavramlar matematiğin çeşitli disiplinlerine uygulanmıştır. Bu yakınsaklık tiplerinden en çok rağbet göreni kuşkusuz toplanabilme teorisinin de en geniş uygulama alanlarından biri olan istatistiksel yakınsaklıktır. Klasik anlamdaki yakınsaklığın bir genellemesi olan istatistiksel yakınsaklık kavramı pozitif tam sayı kümelerinin doğal yoğunluğu kavramına dayanmaktadır. İlk olarak 1951 yılında birbirinden bağımsız olarak Fast [4] ve Steinhaus [5] tarafından tanımlanmıştır. Bu kavram tanıtıldıktan hemen sonra matematikte aktif çalışma alanlarından biri olmuş ve birçok matematikçi tarafından da halen çalışılmakta olan bir konudur. Özellikle Schoenberg [6], Salat [7], Freedman ve Sember [8], Fridy [9], Connor [10], Fridy ve Orhan [11] gibi birçok matematikçi istatistiksel yakınsaklığın gelişimine önemli katkıda bulunmuştur.

Karakaya ve Chisti [12] ağırlık kullanarak ağırlıklı istatistiksel yakınsaklığı elde ettiler. Başarır ve Konca [13] ağırlık ve lacunary kavramlarını birleştirerek ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını tanıttılar ve diğer yakınsaklık tipleri ile arasındaki kapsama bağıntılarını incelediler. Daha sonra Konca vd. [14] bu yakınsaklığı α. dereceden ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsaklığa genelleştirdiler.

Di Maio ve Kočinac [15] 2008 yılında topolojik uzaylarda istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımladılar. Bu çalışmanın ardından topolojik vektör uzaylarında Riesz uzayları kullanılarak yeni yakınsaklık çeşitleri çalışılmaya başlandı. Bahsedilen bu Riesz uzayları ilk olarak 1929 yılında Riesz tarafından tanımlandı. Riesz uzayların gelişmesinde Freudantal [16] ve Kantrovich [17] başta olmak üzere pek çok matematikçi rol almıştır. Bu uzaylar; optimizasyon, Banach uzayları, ölçü ve operatör teorilerinde önemli rol oynar. Riesz uygulamalarının ekonomi alanında da bazı uygulamalarını görmek mümkündür. Albayrak ve Pehlivan [18] yerel katı Riesz uzaylarında istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel süreklilik kavramını tanımladılar. Mohiuddine vd. [19] yerel katı Riesz uzaylarında lacunary istatistiksel yakınklığı çalıştılar.

Çift indisli dizilerin istatistiksel yakınsaklığı ilk olarak Pringsheim [20] tarafından tanımlanmıştır. Yakın bir zamanda da Konca ve Genç [21] çift indisli dizilerin ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsaklığını tanıttı. Konca [22] ağırlıklı lacunary istatistiksel çift indisli dizileri yerel katı Riesz uzaylarına taşıdı.

Kostyrko vd. [23] 2000 yılında doğal sayılar üzerinde ki tanımlı idealleri kullanarak istatistiksel yakınsaklığı da içinde barındıran daha genel bir yakınsaklık tipi olan ideal yakınsaklığı çalıştılar. Daha sonra Savaş ve Das [24], Das vd. [25] ve Savaş vd. [26] istatistiksel yakınsaklık, lacunary istatistiksel yakınsaklık ve $A-$istatistiksel yakınsaklık kavramlarını kullanarak idealler aracılığı ile genelleştirip, $I-\lambda-$istatistiksel yakınsaklık, $I-$lacunary istatistiksel yakınsaklık ve $A^{I}-$ istatistiksel yakınsaklık olarak adlandırılan yeni yakınsaklık çeşitlerini elde ettiler.

Genç ve Konca [27-28] yerel katı Riesz uzaylarında istatistiksel yakınsaklığı idealle ilişkilendirerek ağırlıklı lacunary $I-$istatistiksel yakınsaklığı ve “g” ağırlık fonksiyonunun istatistiksel yakınsaklığını çalıştılar. Daha sonra Das ve Savaş [29] yerel katı Riesz uzaylarında $I-\lambda-$istatistiksel yakınsaklığı çalıştılar. Limit ve yığılma noktası kavramları yakınsaklık tipine göre değişkenlik gösterdiğinden, hemen hemen bütün yakınsaklık tipleri için de bu kavramları tanımlamak münkün olmuştur. Kostyrko vd. [30] ideal yakınsaklığa bağlı olarak $I-$limit noktası ve $I-$yığılma noktası kavramlarını tanımladılar. Bu kavramlar üzerinde diğer önemli çalışmalar Činčura vd. [31] ve Kostyrko vd. [32] tarafından verilmiştir.

3. GENEL BİLGİLER

3.1. Temel Tanım ve Kavramlar

Tanım 3.1.1 $X \neq \emptyset$ bir küme ve F bir cisim olsun.

$$+: X \times X \to X \qquad \qquad \cdot: F \times X \to X$$
$$(x,y) \to x+y \qquad \qquad (\alpha, x) \to \alpha \cdot x$$

fonksiyonları $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in F$ için

i. $x+y=y+x$

ii. $(x+y)+z=(x+y)+z$

iii. $x+\theta=\theta+x=x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.

iv. $x+(-x)=(-x)+x=\theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır.

v. $1 \in F$ olmak üzere $1 \cdot x = x \cdot 1$

vi. $\alpha \cdot (x+y) = \alpha x + \alpha y$

vii. $(\alpha+\beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

viii. $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$

şartlarını sağlıyorsa $(X,+,\cdot)$ üçlüsüne, F cismi üzerinde bir lineer uzay (veya vektör uzayı) denir. Eğer F alınırsa X'e reel lineer uzay, eğer $F=\mathbb{C}$ alınırsa X'e kompleks lineer uzay adı verilir [33].

Tanım 3.1.2 X bir lineer uzay $E \subset X$ de bir lineer uzay ise E ye alt lineer uzay denir [33].

Teorem 3.1.3 X bir lineer uzay ve $E \subset X$ olsun. E nin alt uzay olması için gerek ve yeter şart $\forall \alpha, \beta \in F$ ve $\forall x, y \in E$, için $\alpha x + \beta y \in E$ oluyorsa E'ye X in bir lineer alt uzayı denir [33].

Tanım 3.1.4 X boş olmayan bir küme olsun.
$d: X \times X \to \mathbb{R}$ dönüşümü, $\forall x, y, z \in X$ için

i. $d(x,y) \geq 0$

ii. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

iii. $d(x,y) = d(y,x)$

iv. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (üçgen eşitsizliği)

şartlarını sağlıyor ise, d dönüşümüne X üzerinde bir metrik ve (X,d) ikilisine de bir metrik uzay denir [34].

Tanım 3.1.5 X, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ dönüşümü, $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in F$ için

i. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

şartlarını sağlıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm denir. Normlu uzaylar genellikle $(X, \|\cdot\|)$ ile gösterilir. Lineer uzay üzerinde bir norm tanımlanmışsa bu uzaya normlu lineer uzay da denir [35].

Tanım 3.1.6 Tanım kümesi doğal sayılar olan her f fonksiyonuna dizi adı verilir. O halde bir dizi

$$f : \mathbb{N} \to X$$

şeklinde olan bir dönüşüm olarak düşünülebilir ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f : n \to x_n = f(n) \in X$ yazılabilir [36].

Tanım 3.1.7 $\mathbb{R}$ içinde bir (x_k) dizisi ve $x_0 \in \mathbb{R}$ sayısı verilmiş olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için $k \geq n_\varepsilon$ olduğunda öyleki $|x_k - x_0| < \varepsilon$ olacak şekilde ε na bağlı bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_k) dizisi x_0'a yakınsaktır denir ve $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ şeklinde gösterilir [36].

Tanım 3.1.8 (X,d) bir metrik uzay ve (x_n) X de bir dizi olsun. $\forall\varepsilon>0$ için $m,n\geq n_0$ olduğunda $d(x_m,x_n)<\varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0=n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa, (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir [35].

Tanım 3.1.9 Bir (X,d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi o uzayın bir elemanına yakınsak ise bu (X,d) metrik uzayına tam metrik uzay denir [33].

Tanım 3.1.10 Eğer $(X,\|.\|)$, normlu lineer uzayda her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya tam normlu lineer uzay veya Banach uzayı denir [33].

Tanım 3.1.11 Reel veya kompleks terimli tüm dizilerin kümesini w ile gösterelim. Bir w kümesi, $x=(x_k)$, $y=(y_k)\in w$ ve α bir skaler olmak üzere

$$x+y=(x_k+y_k) \qquad\qquad \alpha\cdot x=(\alpha\cdot x_k)$$

şeklinde tanımlanan ikili işlemler ile bir lineer uzaydır. w uzayının herhangi bir alt lineer uzayına bir dizi uzayı denir. Örneğin,

$$\ell_\infty=\{x=(x_k)\in w:\sup_{k\in\mathbb{N}}|x_k|<\infty\},$$

$$c=\left\{x=(x_k)\in w:\lim_{k\to\infty}x_k \text{ mevcut}\right\},$$

$$c_0=\left\{x=(x_k)\in w:\lim_{k\to\infty}x_k=0\right\},$$

uzayları birer dizi uzayıdır. ℓ_∞, c ve c_0 sırasıyla sınırlı dizilerin uzayı, yakınsak dizilerin uzayı ve sıfıra yakınsak dizilerin uzayı olarak adlandırılır. ℓ_∞, c ve c_0 dizi uzayları, $\|x\|_\infty=\sup_{k\in\mathbb{N}}|x_k|$ normuyla birlikte birer Banach uzaylarıdır [37].

Tanım 3.1.12 X ve Y, w uzayının iki alt kümesi ve $A=(a_{nk})$, $(n,k=1,2,3,...)$ reel veya kompleks terimli bir sonsuz matris olmak üzere, bir $x=(x_k)\in X$ dizisi ve her $n\geq 1$ için

$$y_n := (Ax)_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k$$

serisi yakınsak ise, $y_n := (Ax)_n = Ax$ dönüşüm dizisi mevcuttur denir. Eğer her $x\in X$ için $(Ax)_n$ dönüşüm dizisi mevcut ve $(Ax)_n \in Y$ ise, o zaman A matrisi X den Y ye bir matris dönüşümü tanımlar denir ve bu durum $A\in(X,Y)$ ile gösterilir. Eğer bir x dizisi için Ax dönüşüm dizisi mevcut ve bir x_0 sayısına yakınsak ise, x dizisi x_0 sayısına $A-$toplanabilirdir (veya $A-$limitlenebilirdir) denir ve bu durum $A-\lim x = x_0$ ile gösterilir. Özel olarak, $X=Y=c$ olmak üzere $A\in(c,c)$ ise A ya konservatif matris denir. Ayrıca her yakınsak $x=(x_k)$ dizisi için $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ olduğunda $\lim_{n\to\infty}(Ax)_n = x_0$ koşulu sağlanıyor (yani A matris dönüşümü limiti koruyor) ise bu durumda A regüler matris adını alır ve bu durum $A\in(c,c,p)$ ile gösterilir [38].

Tanım 3.1.13 X boş olmayan herhangi bir cümle olmak üzere;

$$f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to X$$

$$(m,n)\to f(m,n)=x_{mn}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna çift indisli dizi denir. Çift indisli dizininin $x=(x_{mn})$ elemanlarını

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \cdots & x_{mn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \end{bmatrix}$$

şeklindeki bir matris olarak düşünebiliriz. Bunun yanı sıra w^2 kompleks veya reel terimli bütün çift indisli dizilerin cümlesi olup bu cümle $\forall\alpha\in\mathbb{C}$, $\forall x,y\in w^2$ için $\alpha x=(\alpha x_{mn})$ ve $x+y=(x_{mn}+y_{mn})$ işlemleri altında bir lineer uzaydır. $x=(x_{mn})$ kompleks terimli bir çift indisli dizi olmak üzere $\sup_{m,n\geq 0}|x_{mn}|<\infty$ ise x dizisine sınırlıdır denir. ℓ_∞^2 bütün sınırlı çift indisli dizilerin cümlesi olmak üzere;

$$\ell_\infty^2=\left\{x=(x_{mn})\in w^2 : \|x\|_\infty=\sup_{m,n\in\mathbb{N}}|x_{mn}|<\infty\right\}$$

şeklinde olup bu uzay $\|\cdot\|_\infty$ normu ile bir Banach uzayı teşkil eder. Dizilerdeki durumun aksine, çift indisli dizilerde birden fazla yakınsaklık kavramı mevcuttur. Bunlardan en çok çalışılanlar Pringsheim yakınsaklık ve regüler yakınsaklıktır [20].

Tanım 3.1.14 Reel ya da kompleks terimli $x=(x_{mn})$ çift indisli dizisi, $\forall\varepsilon>0$ için $m,n\geq N$ olduğunda $|x_{mn}-x_0|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $N\in\mathbb{N}$ varsa $x=(x_{mn})$ dizisi $x_0\in\mathbb{C}$ sayısına Pringsheim anlamında yakınsak ve x_0 değerine de x dizisinin Pringsheim limiti denir. $P-\lim_{m,n\to\infty}x_{mn}=x_0$ ile gösterilir ($P-$ yakınsaktır). $P-$yakınsak dizilerin cümlesi;

$$C_p=\left\{x=(x_{mn})\in w^2 : \exists x_0\in\mathbb{C},\ \forall\varepsilon>0 \ni \forall m,n\geq k,\ \exists k\in\mathbb{N} : |x_{mn}-x_0|<\varepsilon\right\}$$

şeklinde ifade edilir.

C_p cümlesi $\|x\|_{C_p}=\lim_{N\to\infty}\sup_{m,n\geq N}|x_{mn}|$ ile bir tam yarı norm teşkil ettiği kanıtlanmıştır.

$x=(x_{mn})$ dizisinin $P-$yakınsak olmasına ilaveten $\sup_{m,n\in\mathbb{N}}|x_{mn}|<\infty$ ise x dizisine $P-$ anlamında sınırlı dizi adı verilir [20].

Örnek 3.1.15 Bir $(x_{mn})=\left(\dfrac{1}{n+m}\right)$ çift indisli dizisinin yakınsaklık durumunu inceleyelim.

$$\lim_{n,m\to\infty} x_{mn} = 0 \Leftrightarrow \varepsilon > 0,\ N \in \mathbb{N} \ni \forall n,m \geq N \text{ için}$$

$$\left|x_{mn} - 0\right| = \left|\frac{1}{n+m} - 0\right| = \left|\frac{1}{n+m}\right| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{2}{N} < \varepsilon \Rightarrow N > \frac{2}{\varepsilon}$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ bulunabilir. Bundan dolayı (x_{mn}) dizisi Pringsheim anlamında yakınsaktır [20].

Uyarı 3.1.16 Diziler için yakınsak her dizi sınırlıdır. Fakat Pringsheim anlamında yakınsak bir çift indisli dizi sınırlı olmak zorunda değildir. Örneğin;

$$x_{mn} = \begin{cases} n, & m = 1 \\ m, & n = 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_{mn})$ çift indisli dizisi için $P - \lim x = 0$ iken bu dizi sınırlı değildir [20].

Tanım 3.1.17 $G \times G$ dan G ya tanımlanan bir fonksiyona G da bir ikili işlem denir [39].

Tanım 3.1.18 G boş olmayan bir küme ve $*$, G de bir ikili işlem olsun. $(G,*)$ cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bir grup denir.

i. $*$, G de bir ikili işlemdir.
ii. $*$ işleminin G de birleşme özelliği vardır. Yani, $\forall a,b,c \in G$ için, $a*(b*c) = (a*b)*c$ dir.
iii. $*$ işleminin G de birim elemanı vardır. Yani, $\forall a \in G$ için, $a*e = e*a = a$ olacak şekilde $\exists e \in G$ vardır.
iv. $*$ işleminin göre G deki her elemanın tersi vardır. Yani, $\forall a \in G$ için, $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ olacak şekilde $\exists a^{-1} \in G$ bulunabilir [39].

Tanım 3.1.19 $(G,*)$ bir grup ve $\forall a,b\in G$ için $a*b=b*a$ değişme özelliği de sağlanıyorsa gruba, değişmeli grup veya Abelyen grubu denir [39].

Tanım 3.1.20 $H\neq\varnothing$ üzerinde tanımlı iki ikili işlem $"+"$ ve $"\cdot"$ olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(H,+,\cdot)$ cebirsel yapısına bir halka denir.

i. $(H,+)$, bir değişmeli gruptur.
ii. $"\cdot"$ işleminin H de birleşme özelliği vardır.
iii. $"\cdot"$ işlemini $"+"$ işlemi üzerinde sağdan ve soldan dağılma özellikleri vardır:

$\forall a,b,c\in R$ için $a(b+c)=ab+ac$ ve $\left(a+b\right)c=ac+bc$ [39].

Tanım 3.1.21 H bir halka ve $\varnothing\neq R\subset H$ olsun. H deki işlemlere göre R alt kümesi kendi başına bir halka ise R ye H halkasının bir alt halkası denir [39].

Tanım 3.1.22 H bir halka ve I da H nin bir alt halkası olsun. Eğer $a\in I$ ve $x\in H$ için $ax\in I$ ve $xa\in I$ ise I ' ya, H ' nin bir ideali denir [39].

Şimdi özel bir halka olan Boole halkasını vereceğiz ve Boole halkası yardımıyla tanımlanan ideal tanımını vereceğiz.

Tanım 3.1.23 R bir halka ve a da R nin bir elemanı olsun. Eğer $a^2=a$ ise R bir Boolehalkası olarak adlandırılır [40].

3.2 İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda, dizi ve çift indisli diziler için istatistiksel yakınsaklık kavramları verilecektir. İstatistiksel yakınsaklık pozitif tam sayılar kümesinin doğal yoğunluğunun sıfır olduğu durumlarla ilgilendiği için öncelikle doğal yoğunluk kavramı verilecektir.

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir A alt kümesinin kardinal sayısı $|A|$ ile gösterilsin yani, $|A|:=\operatorname{card}A$ olsun.

Tanım 3.2.1 $A \subset \mathbb{N}$ olsun. $A_n = \{k \le n : k \in A\}$ olsun. Eğer

$$\delta(A) = \lim_{n} \frac{|A_n|}{n}$$

limiti mevcut ise $\delta(A)$ sayısına A kümesinin yoğunluğu denir [Niven ve Zuckerman]. Doğal yoğunluk diğer bir deyişle, bir A_n dizisi var ve bu A_n dizisinin n den büyük olmayacak şekilde seçilen A_n dizisinin $n \to \infty$ için $\frac{A_n}{n}$ limitinin var olması halinde A dizisi yoğunluğa (doğal yoğunluğa) sahiptir denir.

A kümesinin üst yoğunluğu

$$\overline{\delta}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|A_n|}{n}$$

ve benzer şekilde

$$\underline{\delta}(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{|A_n|}{n}$$

olarak gösterilir [8].

Önerme 3.2.2 $\underline{\delta}(A)$ bir alt yoğunluk ve $\overline{\delta}(A)$ bir üst yoğunluk olmak üzere $A \subseteq \mathbb{N}$ ve $B \subseteq \mathbb{N}$ için

i. $A \subseteq B$ ise $\underline{\delta}(A) \le \underline{\delta}(B)$
ii. $A \subseteq B$ ise $\overline{\delta}(A) \le \overline{\delta}(B)$
iii. Her A, B için $\overline{\delta}(A) + \overline{\delta}(B) \ge \overline{\delta}(A \cup B)$
iv. $\underline{\delta}(\varnothing) = \overline{\delta}(\varnothing) = 0$
v. $\underline{\delta}(\mathbb{N}) = \overline{\delta}(\mathbb{N}) = \delta(\mathbb{N}) = 1$
vi. $A \sim B$ ise $\overline{\delta}(A) = \overline{\delta}(B)$
vii. $\underline{\delta}(A) \le \overline{\delta}(A)$

özellikleri sağlanır [8].

Bu kısımda literatürde de bulunabilecek bazı örneklerin veya kendi belirlediğimiz örneklerin doğal yoğunluklarının nasıl bulunacağı detaylı bir şekilde gösterilmiştir.

Örnek 3.2.3 $A=\{1,2,3,...\}=\mathbb{N}$ kümesi için baktığımızda $\delta(A)=1$ dir. Burada $A(1)=1,\ A(2)=2,\ A(3)=3$,..., $A(n)=n$ olup $\delta(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{A(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}=1$ dir.

Örnek 3.2.4 A=$\{2,4,6,...\}$ kümesinin iki farklı yoldan doğal yoğunluğunun $1/2$ olduğunu görmek münkündür.

1.yol: $A(1)=0,\ A(2)=1,\ A(3)=1$, $A(4)=2,...,\ A(n)=\left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right]$ olduğundan

$$\underline{\delta}(A)=\overline{\delta}(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{A(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right]}{n}=\frac{1}{2}.$$

2.yol: $\frac{A(n)}{n}=\frac{0}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{4},\frac{2}{5},\frac{3}{6},\frac{3}{7},...,\frac{n}{2n},\frac{n}{2n+1},...$ olup

$$\underline{\delta}(A)=\liminf_{n}\frac{A(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n}=\frac{1}{2} \text{ ve } \overline{\delta}(A)=\limsup_{n}\frac{A(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$$

$\underline{\delta}(A)=\overline{\delta}(A)=d_0(A)=\frac{1}{2}$ dir.

Tanım 3.2.5 $x=(x_k)$ reel ya da kompleks değerli bir dizi olmak üzere her $\varepsilon>0$ sayısı için

$$\delta(K)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\{k\le n:|x_k-x_0|\ge\varepsilon\}\right|=0$$

olacak şekilde bir x_0 sayısı mevcut ise bu $x=(x_k)$ dizisi x_0 sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. $st-\lim x=x_0$ ile gösterilir [4-5]. Tanımdan da anlaşılacağı gibi istatistiksel yakınsaklık doğal yoğunluğun sıfır olduğu kümelerle ilgilenir.

İstatistiksel yakınsaklık ile Cesaro matrisi kavramlarını karşılaştıralım.
$C_1=(c_{nk})$ Cesaro matrisi olmak üzere bu matris;

$$c_{nk}=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & 1\le k\le n\\ 0, & k>n\end{cases}$$

ile verilir. $K(\varepsilon)=\{k:|x_k-x_0|\ge\varepsilon\}$ ve $\chi_{K(\varepsilon)}$, $K(\varepsilon)$ kümesinin karakteristik fonksiyonunu göstermek üzere

$$\begin{aligned} st-\lim_k x_k=x_0 &\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \lim_n\frac{1}{n}\left|\{k\le n:|x_k-x_0|\ge\varepsilon\}\right|=0\\ &\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \lim_n\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{K(\varepsilon)}(k)=0\\ &\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \lim_n\left(C_1\chi_{K(\varepsilon)}\right)_n=0\end{aligned}$$

olduğu açıktır [10].

Teorem 3.2.6 Hiçbir matris toplanabilme metodu, istatistiksel yakınsaklık metodunu içeremez [11].

Teorem 3.2.7 $p\in\mathbb{N}$ ve $0<p<\infty$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

i. Bir dizi x_0 sayısına kuvvetli $p-$Cesaro toplanabilir ise x_0 sayısına istatistiksel yakınsaktır.
ii. Sınırlı bir dizi x_0 sayısına istatistiksel yakınsak ise x_0 sayısına kuvvetli $p-$Cesaro toplanabilirdir [10].

Lemma 3.2.8 $st-\lim_{k\to\infty} x_k = a$ ve $st-\lim_{k\to\infty} y_k = b$ ve c bir reel sayı olsun. Bu durumda

i. $st-\lim_{k\to\infty}(x_k + y_k) = a+b$

ii. $st-\lim_{k\to\infty}(cx_k) = ca$ dir [7].

Bu kısımda verdiğimiz örnekler istatistiksel yakınsaklıkla ilgili literatürde geçen veya kendi verdiğimiz örneklerin detaylı çözümleridir.

Örnek 3.2.9 Şekildeki gibi tanımlanan,

$$x=(x_n)=\begin{cases} n, & n=k^2 \\ 0, & n\neq k^2 \end{cases} ,(n=1,2,3,...)$$

dizisini inceleyelim. Bulmamız gereken, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k\le n : |x_k - x_0|\ge\varepsilon\right\}\right| = 0$ olacak şekilde bir x_0 sayısıdır.

$$n=k^2 \Rightarrow x_n = n \Rightarrow |n-0| = |n| = n \ge \varepsilon \Rightarrow k^2 \ge \varepsilon \Rightarrow k \ge \sqrt{\varepsilon}$$

$$n\neq k^2 \Rightarrow x_n = 0 \Rightarrow |n-0| = |0-0| = 0 \ge \varepsilon \Rightarrow Ç.K = \varnothing.$$

Bu durumda $\varepsilon > 0$ için

$$\left|\left\{k\le n : |x_k - 0|\ge\varepsilon\right\}\right| = \left|\left\{k\le n : n=k^2, |x_k-0|\ge\varepsilon\right\}\right| \cup \left|\left\{k\le n : n\neq k^2, |x_k-0|\ge\varepsilon\right\}\right|$$

$$= \left|\left\{k\le n : n=k^2, k\ge\sqrt{\varepsilon}\right\}\right| \cup \left|\left\{k\le n : n\neq k^2, 0\ge\varepsilon\right\}\right|$$

elde edilir. Her iki tarafın doğal yoğunluğuna bakılırsa eğer;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k\le n:\left|x_k-0\right|\ge\varepsilon\right\}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k\le n:n=k^2,k\ge\sqrt{\varepsilon}\right\}\right|\cup\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k\le n:n\ne k^2,0\ge\varepsilon\right\}\right|$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sqrt{n}+0=0.$$

Böylece (x_n) dizisi için $st-\lim x=0$ olduğu görülür.

Örnek 3.2.10 Aşağıdaki gibi tanımlanan

$$x=(x_n)=\begin{cases} n &, \quad n=k^2 \\ \dfrac{n-1}{n}, & n\ne k^2 \end{cases} \qquad ,(n=1,2,3,...)$$

dizisi için $st-\lim x=1$ olduğunu gösterelim.

$$n=k^2 \text{ için } x_n=n\Rightarrow\left|x_n-1\right|=\left|n-1\right|=n-1\ge\varepsilon\Rightarrow k^2\ge\varepsilon+1\Rightarrow k\ge\sqrt{\varepsilon+1}$$

$$n\ne k^2 \text{ için } x_n=\frac{n-1}{n}\Rightarrow\left|\frac{n-1}{n}-1\right|=\left|\frac{n-1-n}{n}\right|=\frac{1}{n}\ge\varepsilon\Rightarrow n\le\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow k\le\frac{1}{\varepsilon}.$$

$\varepsilon>0$ ve $k\le\dfrac{1}{\varepsilon}$ olduğundan $\left\{k\le n:n\ne k^2,k\le\dfrac{1}{\varepsilon}\right\}$ kümesi sonlu bir kümedir. Buna göre

$$\left|\left\{k\le n:\left|x_n-1\right|\ge\varepsilon\right\}\right|=\left|\left\{k\le n:n=k^2,\left|x_n-1\right|\ge\varepsilon\right\}\right|\cup\left|\left\{k\le n:n\ne k^2,\left|x_n-1\right|\ge\varepsilon\right\}\right|$$

$$=\left|\left\{k\le n:n=k^2,k>\sqrt{\varepsilon+1}\right\}\right|\cup\left|\left\{k\le n:n\ne k^2,k\le\frac{1}{\varepsilon}\right\}\right|.$$

Yukarıdaki denklemde her iki tarafın doğal yoğunluğuna bakılacak olursa $\left\{k\le n:n\ne k^2,k\le\dfrac{1}{\varepsilon}\right\}$ kümesi sınırlı olduğundan doğal yoğunluğu sıfırdır. Buna göre

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k\le n:\left|x_n-1\right|\ge\varepsilon\right\}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k\le n:n=k^2,k\ge\sqrt{\varepsilon+1}\right\}\right|\cup\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k\le n:n\ne k^2,k\le\frac{1}{\varepsilon}\right\}\right|$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sqrt{n}+0=0.$$

O halde (x_n) dizisi 1'e istatistiksel yakınsaktır. $x_n\to 1(S)$ veya $st-\lim x=1$ şeklinde gösterilir.

Uyarı 3.2.11 Klasik anlamdaki yakınsak diziler sınırlıdır; fakat istatistiksel yakınsak her dizi sınırlı olmayabilir. Şimdi buna bir örnek verelim;

Örnek 3.2.12 Aşağıdaki gibi tanımlanan bir

$$x=(x_n)=\begin{cases}n, & n=k^2\\ 0, & n\ne k^2\end{cases}\quad,(n=1,2,3,...)$$

dizisini incelediğimizde $n=k^2$ için (x_n) dizisinin üstten sınırlı olmadığı açıktır. $(n=1,2,3,...)$ sonsuz tane değer alabilir [41].

Uyarı 3.2.13 Yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır fakat tersi doğru değildir. Buna bir ters örnek verecek olursak;

$$x=(x_n)=\begin{cases}1, & n=k^2\\ 0, & n\ne k^2\end{cases}\quad,(n=1,2,3,...)$$

dizisini incelediğimizde

$$x=(x_n)=(1,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,1,...)=\left(x_1,x_2,x_3,x_4,...\right).$$

Burada dikkat edilirse $\left(x_{n^2}\right)=1$ olduğu görülür diğer durumlarda $(x_n)=0$ dır. Burada

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1},\frac{2}{2},\frac{2}{3},\frac{2}{4},\frac{2}{5},\cdots,\frac{2}{n},\cdots\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$$

olup istatistiksel yakınsaktır. Fakat

$\underline{\lim}_n\, x_n=0$ ve $\overline{\lim}_n\, x_n=1$ olup alt ve üst limitler birbirine eşit olmadığından bu dizi yakınsak değildir [42].

Tanım 3.2.14 Negatif olmayan tamsayıların artan bir dizisi $\theta=\{k_r\}$ olmak üzere eğer $k_0=0$ ve $r\to\infty$ iken $h_r=k_r-k_{r-1}\to\infty$ ise $\theta=\{k_r\}$ dizisine bir lacunary dizisi denir. Ayrıca $\theta=\{k_r\}$ dizisinin aralığı $I_r:=(k_{r-1},k_r]$ ve oranı $q_r:=\dfrac{k_r}{k_{r-1}}$ olarak ifade edilecektir.

Örnek olarak; $\theta=\{k_r\}=2^r$ ve $\theta=\{k_r\}=r!$ dizileri birer lacunary dizileridir [11].

Tanım 3.2.15 $\theta=\{k_r\}$ bir lacunary dizisi olmak üzere her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\{k\in I_r:|x_k-x_0|\geq\varepsilon\}\right|=0$$

olacak şekilde bir x_0 sayısı bulunabiliyorsa $x=(x_k)$ dizisine lacunary istatistiksel yakınsaktır denilir. $S_\theta-\lim x=x_0$ veya $x_k\to x_0\,(S_\theta)$ şeklinde gösterilir. Lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi aşağıdaki şekilde gösterilir [11]:

$$S_\theta:=\left\{x=(x_k)\in w:\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\{k\in I_r:|x_k-x_0|\geq\varepsilon\}\right|\right\}=0\,.$$

Tanım 3.2.16 Bir lacunary dizisi $\theta=\{k_r\}$ olmak üzere

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|x_k-x_0|=0$$

olacak şekilde bir x_0 değeri mevcutsa $x=(x_k)$ dizisine N_θ anlamında lacunary istatistiksel yakınsaktır denir [11].

Tanım 3.2.17 Bir $x=(x_k)$ dizisi olmak üzere $\varepsilon>0$ ve $x_0\in\mathbb{R}$ için

$$\lim_n \frac{1}{P_n}\left|\left\{k\le P_n : p_k\left|x_k-x_0\right|\ge\varepsilon\right\}\right|=0$$

ise $x=(x_k)$ dizisi x_0 sayısına ağırlıklı istatistiksel yakınsaktır denir ve $S_{\bar{N}}-\lim_{k\to\infty} x_k=x_0$ şeklinde gösterilir [43].

Tanım 3.2.18 Bir $\theta=\{k_r\}$ lacunary dizisi (p_k) pozitif reel sayıların bir dizisi olsun öyle ki

$$H_r:=\sum_{k\in I_r} p_k,\ P_{k_r}:=\sum_{k\in(0,k_r]} p_k,\ P_{k_{r-1}}:=\sum_{k\in(0,k_{r-1}]} p_k,\ Q_r=\frac{P_{k_r}}{P_{k_{r-1}}},\ P_0=0,\ I'_r=\left(P_{k_{r-1}},P_{k_r}\right].$$

$I_r=(k_{r-1},k_r]$ olduğu bilindiğine göre $H_r=P_{k_r}-P_{k_{r-1}}$ olduğu kolayca görülebilir. Her bir $k\in\mathbb{N}$ için $p_k=1$ olarak alınırsa H_r, P_{k_r}, $P_{k_{r-1}}$, Q_r ve I_r' sırasıyla h_r, k_r, k_{r-1}, q_r ve I_r'ye indirgenmiş olur. Burada $r\to\infty$ iken $H_r\to\infty$ olacak şekilde $n\to\infty$ için $P_n\to\infty$ olduğu kabul edilecektir [13].

Tanım 3.2.19 Bir $x=(x_k)$ dizisi olmak üzere, her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{H_r}\left|\left\{k\in I_r' : p_k\left|x_k-x_0\right|\ge\varepsilon\right\}\right|=0$$

ise $x=(x_k)$ dizisi x_0'a ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $S_{(\bar{N},\theta)}-\lim x=x_0$ olarak yazılır. Tüm ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi $S_{(\bar{N},\theta)}$ ile gösterilir [13].

3.3 İdeal Yakınsaklık

Tanım 3.3.1 $X \neq \varnothing$ olsun. $I \subset 2^X$ ($P(X) = 2^X$: X kümesinin kuvvet kümelerinin ailesi) sınıfına, aşağıdaki şartlar sağlandığı takdirde, X de bir ideal denir.

i. $\varnothing \in I$

ii. $\forall A, B \in I \Rightarrow A \cup B \in I$

iii. $\forall A \in I,\ \forall B \subset A \Rightarrow B \in I$

Eğer $X \notin I$ oluyorsa yani $I \neq 2^X$ ise I idealine öz ideal (non-trivial ideal) adı verilir. Buna göre 2^X dışındaki tüm idealler öz ideallerdir [3].

Tanım 3.3.2 I, X de bir öz (non-trivial) ideal olsun. Eğer her $x \in X$ için $\{x\} \in I$ ise, yani I öz ideali X in tüm sonlu alt kümelerini içeriyor ise, I idealine uygun (admissible ideal) ideal denir [3].

Tanım 3.3.3 $X \neq \varnothing$ olsun. X in boş kümeden farklı alt kümelerinin $F \subset 2^X$ sınıfına aşağıdaki şartlar;

i. $\varnothing \notin F$

ii. $\forall A, B \in F \Rightarrow A \cap B \in F$

iii. $\forall A \in I,\ \forall B \supset A \Rightarrow B \in I$

sağlandığı takdirde X de bir filtre (veya süzgeç) adı verilir [3].

Aşağıdaki önerme idealle ilişkilendirilmiş filtreyi ifade etmektedir.

Önerme 3.3.4 $X \neq \varnothing$ ve I, X ' de bir öz ideal (non-trivial ideal) olsun. Bu durumda

$$F(I) = \{M \subseteq X : \exists A \in I : M = X - A\}$$

sınıfına X üzerinde bir filtre denir. $F(I)$ sınıfı I ile ilişkilendirilmiş filtre olarak adlandırılır [3].

Tanım 3.3.5 I, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinde bir öz ideal (non-trivial ideal) olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$ için $A(\varepsilon)=\{n:|x_n-x_0|\geq\varepsilon\}\in I$ oluyorsa $x=(x_n)_{n=1}^{\infty}$ reel sayı dizisine $x_0\in\mathbb{R}$ ye $I-$ yakınsaktır (ideal yakınsaktır) denir.

Eğer $x=(x_n)$ dizisi $x_0\in\mathbb{R}$ ye $I-$yakınsak ise $I-\lim x_n=x_0$ veya $I-\lim x=x_0$ olarak gösterilir ve $x=(x_n)$ dizisinin $I-$limiti denir [3]. İdeal yakınsaklık kavramının bazı bilinen yakınsaklık aksiyomlarını sağlayıp sağlamadığı sorusu akla gelebilir. Yakınsaklığın en çok bilinen aksiyomları aşağıdaki gibidir:

(S) Her $x=(x_n)=(x_0,x_0,x_0,...,x_0,...)$ sabit dizisi $x_0\in\mathbb{R}$'ye $I-$yakınsaktır.

(H) Limitin tekliği; eğer $I-\lim x=x_0$ ve $I-\lim x=x_0'$ ise $x_0=x_0'$ dır.

(F) Eğer $I-\lim x=x_0$ ise x'in her bir y alt dizisi için $I-\lim y=x_0$ dır.

(U) Eğer x in her bir y alt dizisinin x_0'a $I-$yakınsak bir z alt dizisi varsa x de x_0 a $I-$ yakınsaktır denir [3].

Teorem 3.3.6 I, $\mathbb{N}$ nin bir uygun ideali olsun. Buna göre,

i. $I-$yakınsaklık (S), (H) ve (U) aksiyomlarını sağlar.
ii. Eğer $I-$ideali bir sonsuz elemanlı bir küme içeriyorsa, $I-$yakınsaklık (F) aksiyomunu sağlamaz [3].

Uyarı 3.3.7 Eğer bir I uygun ideal (admissible ideal) sonsuz elemanlı küme içermiyorsa, $\mathbb{N}$ nin tüm sonlu alt kümelerinin sınıfı ile I çakışır ve $\mathbb{R}$'deki yakınsaklık ile ideal yakınsaklık eşittir. Bundan dolayı $I-$ yakınsaklık (F) aksiyomunu sağlar.

Şimdi $I-$yakınsaklıkla ilgili birkaç örnek verilecektir.

i. $I_0=\{\varnothing\}$ olsun. Bu $\mathbb{N}$ 'de boştan farklı minimal non-trivial idealdir. Açık bir şekilde bu dizi I_0-yakınsak olması için gerek ve yeter şart sabit dizi olmasıdır.

ii. $\varnothing \neq M \subseteq \mathbb{N}, M \neq \mathbb{N}$ olsun. $I_M=2^M$ olarak seçelim. Bu durumda I_M, $\mathbb{N}$ kümesinde bir öz (non-trivial) idealdir. Bir $x=(x_n)_1^\infty$ dizisi I_M-yakınsaktır gerek ve yeter şart $N \backslash M$ üzerinde sabit dizidir (Her bir terimi $\mathbb{N}$ ile denk geldiğinden sabittir. Açıkça I. ve II. örneklerinin açık bir halidir).

iii. I_f, $\mathbb{N}$ 'nin tüm sonlu alt sınıfı olarak gösterilsin. Bu durumda I_f, $\mathbb{N}$ 'nin bir uygun (admissible) idealidir ve I_f yakınsaklık $\mathbb{R}$ deki klasik yakınsaklık ile çakışır.

iv. $I_d=\{A\subseteq\mathbb{N}:d(A)=0\}$ olarak seçilsin. Buna göre I_d, $\mathbb{N}$ 'nin bir admissible (uygun) idealidir ve I_d yakınsaklık istatistiksel yakınsaklık ile çakışır.

v. $I_\delta=\{A\subseteq\mathbb{N}:\delta(A)=0\}$ olarak seçilsin. Buna göre I_δ, $\mathbb{N}$ 'nin bir admissible (uygun) idealidir ve I_d yakınsaklık logaritmik istatistiksel yakınsaklığa indirgenmiş olur. Eğer $I_\delta-\lim x_n=x_0$ ise $I_d-\lim x_n=x_0$ dir (iii. 'e bakınız). Tersi doğru değildir.

iv. ve v. şıklarda, ideal yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki görülebilir [3].

Tanım 3.3.8 $I_2, 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ nin bir ideali olmak üzere eğer her $\varepsilon>0$ için

$$\{(k,l)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:|x_{k,l}-x_0|\geq\varepsilon\}\in I_2$$

oluyorsa $(x_{k,l})$ çift indisli dizisi I_2- yakınsaktır denir [44].

Tanım 3.3.9 Bir $x=(x_k)$ dizi olmak üzere her $\varepsilon,\delta>0$ için

$$\left\{n\in\mathbb{N}:\frac{1}{n}\left|\left\{k\leq n:\left|x_k-x_0\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\geq\delta\right\}\in I$$

ise $x=(x_k)$ dizisi, x_0'a $I-$istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $x_k\to x_0\left(S(I)\right)$ veya $S(I)-\lim_{k\to\infty}x_k=x_0$ olarak ifade edilmektedir. Tüm $I-$istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi $S(I)$ ile gösterilir [25].

Tanım 3.3.10 Bir $x=(x_k)$ dizisi verilsin. Her $\varepsilon,\delta>0$ için

$$\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r:\left|x_k-x_0\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\geq\delta\right\}\in I$$

ise $x=(x_k)$ dizisi, x_0'a $I-$lacunary istatistiksel yakınsaktır (veya $S_\theta(I)-$yakınsaktır) denilir. Buna göre $S_\theta(I)-\lim_{k\to\infty}x_k=x_0$ veya $x_k\to x_0\left(S_\theta(I)\right)$ olarak ifade edilmektedir. Tüm $I-$lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin sınıfı $S_\theta(I)$ ile gösterilecektir [25].

Tanım 3.3.11 Bir $x=(x_k)$ dizisi verilsin. Her $\varepsilon,\delta>0$ için

$$\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{H_r}\left|\left\{k\in I_r':p_k\left|x_k-x_0\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\geq\delta\right\}\in I$$

ise $x=(x_k)$ dizisi, x_0'a ağırlıklı lacunary $I-$istatistiksel yakınsaktır (veya $S_{(\bar{N},\theta)}(I)-$yakınsaktır) denilir. Buna göre $S_{(\bar{N},\theta)}(I)-\lim_{k\to\infty}x_k=x_0$ veya $x_k\to x_0\left(S_{(\bar{N},\theta)}(I)\right)$ olarak ifade edilmektedir. Tüm $I-$lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin sınıfı $S_{(\bar{N},\theta)}(I)$ ile gösterilecektir. Burada $I=I_{fin}$ için, $S_{(\bar{N},\theta)}(I)-$yakınsaklık $S_{(R,\theta)}$ ile çakışır. Her $k\in\mathbb{N}$ için $p_k=1$ ise $S_{(\bar{N},\theta)}(I)-$yakınsaklık, $S_\theta(I)-$yakınsaklığa indirgenir [27].

Tanım 3.3.12 “g” ağırlık fonksiyonu $g:\mathbb{N}\to[0,\infty)$ tanımlı olmak üzere, $n\to\infty$ için limit durumunda $\lim_{n\to\infty} g(n)=\infty$ olsun. $A\subseteq\mathbb{N}$ için $A(1,n)$ kümesi $A\cap[1,n]$ kümesini belirtmek üzere g ağırlığının üst ve alt yoğunluğu sırasıyla;

$$\overline{d}_g(A)=\limsup_{n\to\infty}\frac{A(1,n)}{g(n)}$$

ve

$$\underline{d}_g(A)=\liminf_{n\to\infty}\frac{A(1,n)}{g(n)}$$

dir. Eğer $\lim_{n\to\infty} A(1,n)/g(n)$ var olması durumunda A kümesinin g ağırlıklı yoğunluğu vardır denir ve $d_g(A)$ ile gösterilir. Burada $g:\mathbb{N}\to[0,\infty)$ şartını sağlayan tüm g ağırlık fonksiyonların koleksiyonu "G" ile gösterilecektir. Ek olarak,

$$I_g=\{A\subseteq\mathbb{N}:\overline{d}_g(A)=0\}$$

ailesi bir ideal belirtir. Eğer $\mathbb{N}\in I_g$ ise $n\to\infty$ için $\frac{n}{g(n)}\to 0$ aksine $\mathbb{N}\notin I_g$ ise $\frac{n}{g(n)}\not\to 0$ dir [45].

3.4. Yerel Katı Riesz Uzayları

Bu bölümde Riesz uzayları, yerel katı Riesz uzayları ve bu uzaydaki yakınsaklık çeşitlerinin tanımları verilecektir. Bu bağlamda ilk olarak yerel katı Riesz uzayının oluşumunu sağlayan; topoloji, komşuluk tabanı ve topolojik vektör uzay gibi bazı topolojik kavramların tanımları ile başlanacaktır.

Tanım 3.4.1 X boş olmayan bir cümle ve τ, X ’in alt cümlelerinin bir ailesi olsun.

i. $X,\varnothing\in\tau$ dur.

ii. τ ya ait keyfi sayıdaki cümlenin birleşimi τ ya aittir.

iii. τ ya ait iki cümlenin arakesiti τ ya aittir.

şartları sağlanıyorsa τ 'ya, X için bir topoloji ve (X,τ) çiftine de topolojik uzay denir [35].

Tanım 3.4.2 X, bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve τ, X de bir topoloji olsun. Eğer

$$f(x,y) := x+y \qquad \text{ve} \qquad g(\alpha,x) := \alpha \cdot x$$

olarak tanımlanan $f := X \times X \to X$ ve $g := K \times X \to X$ dönüşümleri sürekli ise, X uzayına bir topolojik vektör uzayı denir [46].

Tanım 3.4.3 (X , τ) bir topolojik vektör uzayı, $V \subset X$ ve $x \in V$ olsun. Eğer

$$\exists\, A \in \tau : x \in A \subset V$$

ise, V 'ye x 'in bir komşuluğu, A 'ya ise, x 'in bir açık komşuluğu (veya açık civarı) denir. x 'in bütün komşulukları kümesine x 'in komşuluk sistemi denir. Bu küme

$$V(x) := \{V \subset X \mid \exists\, A \in \tau : x \in A \subset V\}$$

ile gösterilir [46].

Tanım 3.4.4 (X , τ) bir topolojik vektör uzayı, $x \in X$ ve $V(x)$ ailesi x 'de bir komşuluk sistemi olsun. Eğer $V(x)$ ' in bir V_x alt ailesi için

$$\forall V \in V(x) \Rightarrow \exists W \in V_x : W \subset V$$

koşulu sağlanıyorsa V_x ailesine x ' de bir komşuluk tabanı denir [46].

Önerme 3.4.5 Eğer bir $V(x)$ ailesi sıfırda bir komşuluk tabanı ise, her $V_x := \{x+V \mid V \in V(x)\}$ ailesi x 'de bir komşuluk tabanıdır [46].

Tanım 3.4.6 Bir topolojik vektör uzayda sıfırın bir komşuluk tabanına bu uzayın bir yerel tabanı denir [46].

Teorem 3.4.7. X bir topolojik vektör uzayı ve $V(x)$ bir yerel taban olsun. O halde

$$X \text{ Hausdorfftur} \Leftrightarrow \bigcap_{V\in V(x)} V = \{\theta\}$$

dir [46].

Tanım 3.4.8 X bir vektör uzayı ve "$\preceq$" bu uzay üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanıyor ise X e sıralı vektör uzayı denir:

i. Eğer $x, y \in X$ ve $y \preceq x$ ise her bir $z \in X$ için $y+z \preceq x+z$,
ii. Eğer $x, y \in X$ ve $y \preceq x$ ise her bir $\alpha \geq 0$ için $\alpha y \preceq \alpha x$.

Ek olarak, eğer X kısmi sıralamaya göre bir örgü yani, X in iki noktadan oluşan her alt kümesinin supremumu ve infumumu mevcut ise X e bir Riesz uzayı (veya vektör örgüsü) denir [2]. Aşağıda bazı Riesz uzayı örnekleri verilmektedir.

Örnek 3.4.9

i. $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere;

$$x \preceq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i \, (1 \leq i \leq n)$$

şeklinde tanımlanan $\preceq$ koordinatsal sıralamasıyla birlikte $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayı bir Riesz uzayıdır.

ii. $\mathbb{R}^X$, bir X bir kümesi üzerinde tanımlı tüm reel değerli fonksiyonların ailesini belirtsin. $f, g \in \mathbb{R}^X$ olmak üzere,

$$f \preceq g \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } f(x) \leq g(x)$$

ile tanımlı olan $\preceq$ noktasal sıralamasıyla birlikte $\mathbb{R}^X$ bir Riesz uzayıdır.

X bir Riesz uzayı ve X'in sıfır elemanı θ olsun. X'in bir x elemanı için $x^+ = x \vee \theta$, $x^- = (-x) \vee \theta$ ve $|x| = x \vee (-x)$ ifadeleri sırasıyla x in pozitif kısmı, negatif kısmı ve mutlak değeri olarak adlandırılır [47].

Tanım 3.4.10 Bir X Riesz uzayının bir S alt kümesi için, eğer $y \in S$ ve $|x| \preceq |y|$ olması $x \in S$ olmasını gerektiriyorsa S'ye katı küme denir [47].

Tanım 3.4.11 Bir X vektör uzayı üzerindeki her τ lineer topolojisi, aşağıdaki özellikleri sağlayan, sıfırın komşulukları için bir $\mathcal{N}$ tabanına sahiptir [47]:

i. Her bir $V \in \mathcal{N}$ bir dengeli kümedir; yani, tüm $x \in V$ ve $|\lambda| \leq 1$ olan her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda x \in V$ dir.

ii. Her bir $V \in \mathcal{N}$ bir yutan kümedir; yani, her $x \in X$ için $\lambda x \in \mathcal{N}$ olacak şekilde bir $\lambda > 0$ mevcuttur.

iii. Her bir $V \in \mathcal{N}$ için $W + W \subseteq V$ olan bir $W \in \mathcal{N}$ mevcuttur.

Bu tez boyunca $\mathcal{N}_{sol}$ ifadesi yukarıdaki üç şartı sağlayan bir sembol olarak kullanılacaktır.

Tanım 3.4.12 Bir X Riesz uzayı üzerindeki bir τ lineer topolojisi katı kümelerden oluşan sıfırın bir komşuluk tabanına sahip ise τ ya yerel katı topoloji denir. Bu durumda (X, τ) bir yerel katı Riesz uzayı oluşturur [47].

Tanım 3.4.13 (x_n) topolojik uzayda bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer x_0'ın her V komşuluğu için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin V\}) = 0$$

sağlanıyorsa (x_n) dizisi x_0 noktasına istatistiksel yakınsaktır denir [15].

Tanım 3.4.14 (X,τ) bir yerel katı Riesz uzayı ve $x=(x_n)$, X 'de bir dizi olsun. Eğer sıfırın her bir V $\tau-$komşuluğu için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k\le n : x_k - x_0 \notin V\right\}\right| = 0$$

ifadesi sağlanıyorsa (x_n) dizisi $x_0\in X$ noktasına istatistiksel $\tau-$yakınsaktır denir. Bu durumda $st_\tau-\lim x = x_0$ veya kısaca $x_n \xrightarrow{st-\tau} x_0$ şeklinde gösterilir [18].

Tanım 3.4.15 (X,τ) bir yerel katı Riesz uzayı ve $\theta=\{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. Eğer sıfırın her bir V $\tau-$komşuluğu için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r : x_k - x_0 \notin V\right\}\right| = 0$$

ifadesi sağlanıyorsa $(x_k)\in X$ dizisi $x_0\in X$ noktasına lacunary istatistiksel $\tau-$yakınsaktır denir. Bu durumda $S_\theta-\lim x = x_0$ veya kısaca $x_n \xrightarrow{S_\theta(\tau)} x_0$ şeklinde gösterilir [19].

Tanım 3.4.16 (X,τ) bir yerel katı Riesz uzayı ve $\theta=\{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. Eğer sıfırın her bir V $\tau-$komşuluğu için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{H_r}\left|\left\{k\in I_r' : p_k\left(x_k - x_0\right) \notin V\right\}\right| = 0$$

ifadesi sağlanıyorsa $(x_k)\in X$ dizisi $x_0\in X$ noktasına ağırlıklı lacunary istatistiksel $\tau-$yakınsaktır denir. Bu durumda $S_{(\bar{N},\theta)}-\lim x = x_0$ şeklinde gösterilir [48].

Tanım 3.4.17 (X,τ) bir yerel katı Riesz uzayı ve $x=(x_{k,l})$, X 'de bir çift indisli dizi olsun. Eğer sıfırın her bir V $\tau-$komşuluğu için

$$P-\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{mn}\left|\left\{(k,l), k\le n \text{ ve } l\le n : x_{k,l} - x_0 \notin V\right\}\right| = 0$$

ifadesi sağlanıyorsa $(x_{k,l})$ dizisi $x_0 \in X$ noktasına istatistiksel $\tau -$yakınsaktır denir ve $S_2 - \lim x = x_0$ ile gösterilir [49].

Tanım 3.4.18 (X,τ) bir yerel katı Riesz uzayı ve $x = (x_n)$, X 'de bir dizi olsun. Eğer sıfırın her bir V $\tau -$komşuluğu için

$$\{k \in \mathbb{N} : x_k - x_0 \notin V\} \in I$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ varsa $x = (x_n)$ dizisine yerel katı Riesz uzaylarında ideal yakınsaktır denir ve $I(\tau) - \lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ şeklinde gösterilir [50].

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Boole Halkası Yardımıyla Tanımlanan İdeal Tanımı ile Toplanabilme Teorisindeki İdeal Tanımlarının Denkliği

Bu bölümde toplanabilme teorisindeki ideal tanımı ile cebirdeki Boole halkası yardımıyla tanımlanan ideal tanımların denk olduğunu göstereceğiz.

Daha önce Tanım 3.1.23 de bahsedilen Boole halkasında;

" Δ" ifadesi simetrik fark olmak üzere A ve B kümesinin simetrik farkı;

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

dir. Burada " $+$ " işlemi yerine simetrik fark (Δ) ve "$\bullet$" işlemi yerine de kesişim $\cap$ alırsak tanımlanan Boole halkası $(P(X),\, \Delta,\, \cap)$ şeklinde olur.

Teorem 4.1.1 Boole halkası yardımıyla tanımlanan ideal $(P(X),\, \Delta,\, \cap)$, Kostyrko [3] nun tanımladığı toplanabilme teorisindeki ideale denktir.

Toplanabilmedeki ideal tanımı:		Boole Halkası ile tanımlanan ideal tanımı:	
i.	$\varnothing \in I$	1.	$\varnothing \in I$
ii.	$\forall A, B \in I \Rightarrow A \cup B \in I$	2.	$\forall A, B \in I \Rightarrow A\Delta B \in I$
iii.	$\forall A \in I,\ \forall B \subset A \Rightarrow B \in I$	3.	$\forall B \in P(X)$ ve $\forall A \in I$ için $A \cap B \in I$

İspat: Soldaki ve sağdaki ifadelerin birbirlerine denk olduğunu gösterelim.

$(:\Rightarrow)$ i. şartından dolayı 1. şartının sağlandığı açıktır.

Şimdi 2. nin sağlandığını gösterelim. Yine aynı şekilde i. ii. ve iii. sağlansın. $\forall A, B \in I \Rightarrow A\Delta B \in I$ mıdır?

ii. den $\forall A, B \in I \Rightarrow A \cup B \in I$ idi. A ve B nin simetrik farkı $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ olup

$$\left.\begin{array}{l} A\setminus B\subset A\in I \\ B\setminus A\subset B\in I \end{array}\right\}\Rightarrow (A\setminus B)\in I,\ (B\setminus A)\in I$$

dır.

ii. den $\forall A,B\in I\Rightarrow A\cup B\in I$ idi. Aynı şekilde

$$(A\setminus B)\in I \text{ ve } (B\setminus A)\in I\Rightarrow (A\setminus B)\cup(B\setminus A)=A\Delta B\in I\ .$$

Son olarak 3. ün sağlandığını gösterelim. i. ii. ve iii. sağlansın. Bu durumda $\forall B\in P(X)$ *ve* $\forall A\in I$ için $A\cap B\in I$ mıdır?

iii. den

$$B\subset A\Rightarrow B\cap A\subset A$$

dir. $B\cap A\subset A$ ve ii) den $\forall A\in I$ olduğundan $B\cap A\in I$ elde edilir. $I\subseteq P(X)$ olduğundan,

$$\forall B\in P(X) \text{ ve } \forall A\in I \text{ için } A\cap B\in I$$

dir. Böylece 3. ü göstermiş olduk. Şimdi de yeter şartın sağlandığını gösterelim:

$(:\Leftarrow)$ Şimdi 1. 2. 3. şartlarının sağlandığını kabul edelim i. ii. iii. şartlarının sağlandığını gösterelim.

i. nin sağlandığı açıktır.

ii. $\forall A,B\in I\Rightarrow A\cup B\in I$ mıdır?

2. den $\forall A,B\in I\Rightarrow A\Delta B\in I$ olduğunu biliyoruz. $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\in I$ ve 3. den $A\cap B\in I$. Burada simetrik farktaki eşitliğin sağ tarafını $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=X$ ve $(A\cap B)=Y$ ile gösterelim. 2. ye benzer olarak $X,Y\in I\Rightarrow X\Delta Y\in I$ dir.

$$X \Delta Y \in I \Leftrightarrow \{((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \Delta (A \cap B)\} \in I$$

$$\Leftrightarrow \{[((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \setminus (A \cap B)] \cup [(A \cap B) \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A))]\} \in I$$

$$\Leftrightarrow \{((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cup ((A \cap B) \setminus (A \cup B))\} \in I$$

$$\Leftrightarrow \{(A \cup B) \Delta (A \cap B)\} \in I$$

olup $(A \cup B) \in I$ ve $(A \cap B) \in I$ dir. Bizim göstermemiz gereken de $(A \cup B) \in I$ idi. Dolayısıyla $\forall A, B \in I$ için $(A \cup B) \in I$ dir. Son olarak iii. sağlandığını göstermemiz yeterli olacaktır.

iii. $\forall A \in I,\ \forall B \subset A \Rightarrow B \in I$ mıdır?

3. den $\forall B \in P(X)$ ve $\forall A \in I$ için $A \cap B \in I$ olduğunu biliyoruz. Göstermemiz gereken $\forall A \in I$ ve $\forall B \subset A$ için $B \in I$ olmasıdır.

$B \subset A \Leftrightarrow A \cap B = B$ olduğunu biliyoruz [51]. Ayrıca 3. den $A \cap B \in I$ olduğundan $B \in I$ elde edilir.

4.2 Yerel Katı Riesz Uzaylarında $I-$Ağırlıklı Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde yerel katı Riesz uzaylarında $I-$ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsaklığı tanımlayacağız ve bazı kapsama bağıntılarını vereceğiz.

Tanım 4.2.1 (X, τ) bir yerel katı Riesz uzayı ve $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olarak verilsin. Eğer sıfırın her V $\tau-$komşuluğu ve $\delta > 0$ için;

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \lim_{r \to \infty} \frac{1}{H_r} \left| \{ k \in I_r' : p_k (x_k - x_0) \notin V \} \right| \geq \delta \right\} \in I \tag{4.1}$$

yani,

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{H_r} \left| \left\{ k \in I_r' : p_k \left(x_k - x_0 \right) \notin V \right\} \right| < \delta \right\} \in F(I)$$

olacak şekilde bir $x_0 \in \mathbb{R}$ sayısı varsa $x = (x_k) \in X$ dizisi yerel katı Riesz uzaylarında x_0 'a $I-$ ağırlıklı lacunary istatistiksel $\tau-$yakınsaktır ($S^I_{(\bar{N},\theta)}(\tau)-$yakınsaktır) denir. $S^I_{(\bar{N},\theta)}(\tau)-\lim x = x_0$ veya $x_k \xrightarrow{S^I_{(\bar{N},\theta)}(\tau)} x_0$ şeklinde gösterilir. $I-$ağırlıklı lacunary istatistiksel $\tau-$yakınsak tüm dizilerin kümesi $S^I_{(\bar{N},\theta)}(\tau)$ şeklinde gösterilir [27].

Uyarı 4.2.2 Tanım 4.2.1. de tüm $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ ve $I = I_{fin}$ olarak alınırsa $S^I_{(\bar{N},\theta)}(\tau)$-yakınsaklık; Mohuddine ve Alghamdi [19] nin tanımladığı $S_\theta(\tau)$ yakınsaklığa indirgenir.

Uyarı 4.2.3 (4.1) de her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ alınırsa Tanım 4.2.1 aşağıdaki tanıma indirgenmiş olur.

Tanım 4.2.4 (X,τ) bir yerel katı Riesz uzayı ve $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olarak verilsin. Eğer sıfırın her V $\tau-$komşuluğu ve $\delta > 0$ için;

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : x_k - x_0 \notin V \right\} \right| \geq \delta \right\} \in I$$

olacak şekilde bir $x_0 \in \mathbb{R}$ sayısı varsa $x = (x_k) \in X$ dizisi yerel katı Riesz uzaylarında x_0 'a $I-$ lacunary istatistiksel yakınsaktır ($S^I_\theta(\tau)$ -yakınsaktır) denir ve $S^I_\theta(\tau) - \lim x = x_0$ veya $x_k \xrightarrow{S^I_\theta(\tau)} x_0$ şeklinde gösterilir. $I-$lacunary istatistiksel yakınsak tüm dizilerin kümesi $S^I_\theta(\tau)$ şeklinde gösterilir [27].

Tanım 4.2.5 (X,τ) bir yerel katı Riesz uzayı ve $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olarak verilsin. Eğer sıfırın her V $\tau-$komşuluğu ve $\delta > 0$ için;

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_n} \left| \left\{ k \le P_n : p_k \left(x_k - x_0 \right) \notin V \right\} \right| \ge \delta \right\} \in I$$

olacak şekilde bir $x_0 \in \mathbb{R}$ sayısı varsa $x = (x_k) \in X$ dizisi yerel katı Riesz uzaylarında x_0'a $I-$ ağırlıklı istatistiksel yakınsaktır ($S_{\bar{N}}^{I}(\tau)$-yakınsaktır) denir ve $S_{\bar{N}}^{I}(\tau) - \lim x = x_0$ veya $x_k \xrightarrow{S_{\bar{N}}^{I}(\tau)} x_0$ şeklinde gösterilir. $I-$istatistiksel yakınsak tüm dizilerin kümesi $S_{\bar{N}}^{I}(\tau)$ şeklinde gösterilir [27].

Tanım 4.2.6 (X,τ) bir yerel katı Riesz uzayı ve $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olarak verilsin. Bir $\alpha > 0$ sayısı vardır öyleki eğer sıfırın her V $\tau-$komşuluğu ve $\delta > 0$ için;

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{H_r} \left| \left\{ k \in I_r' : \alpha p_k x_k \notin V \right\} \right| \ge \delta \right\} \in I$$

ise $x = (x_k) \in X$ dizisi yerel katı Riesz uzaylarında $I-$ağırlıklı istatistiksel $\tau-$sınırlıdır ($S_{(\bar{N},\theta)}^{I}(\tau)-$sınırlıdır) denir [27].

Teorem 4.2.7 (X,τ) bir Hausdorff yerel katı Riesz uzayı ve $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olarak verilsin. $x = (x_k)$, $y = (y_k) \in X$ iki dizi olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

i. Eğer $S_{(\bar{N},\theta)}^{I}(\tau) - \lim x = x_0$ ve $S_{(\bar{N},\theta)}^{I}(\tau) - \lim x = y_0$ ise $x_0 = y_0$.

ii. Eğer $S_{(\bar{N},\theta)}^{I}(\tau) - \lim x = x_0$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ ise $S_{(\bar{N},\theta)}^{I}(\tau) - \lim \alpha x = \alpha x_0$.

iii. Eğer $S_{(\bar{N},\theta)}^{I}(\tau) - \lim x = x_0$ ve $S_{(\bar{N},\theta)}^{I}(\tau) - \lim y = y_0$ ise $S_{(\bar{N},\theta)}^{I}(\tau) - \lim x + y = x_0 + y_0$.

İspat:

i. Kabul edelim ki $S_{(\bar{N},\theta)}^{I}(\tau) - \lim x = x_0$ ve $S_{(\bar{N},\theta)}^{I}(\tau) - \lim x = y_0$ olsun. V ise sıfırın keyfi bir $\tau-$komşuluğu olsun. Bu durumda bir $Y \subseteq V$ olacak şekilde bir $Y \in \mathcal{N}_{sol}$ vardır. Başka bir $W \in \mathcal{N}_{sol}$ seçtiğimizde öyle ki $W+W \subseteq Y$ dir. $S^{I}_{(\bar{N},\theta)}(\tau)-\lim x = x_0$ ve $S^{I}_{(\bar{N},\theta)}(\tau)-\lim x = y_0$ olduğundan herhangi bir $\delta > 0$ için,

$$A_1 = \left\{ r \in \mathbb{N} : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{H_r} \left| \left\{ k \in I_r' : p_k(x_k - x_0) \notin V \right\} \right| < \delta \right\} \in F(I)$$

ve

$$A_2 = \left\{ r \in \mathbb{N} : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{H_r} \left| \left\{ k \in I_r' : p_k(x_k - y_0) \notin V \right\} \right| < \delta \right\} \in F(I)$$

yazılabilir. Tüm $r \in \mathbb{N}$ için $A_1,\ A_2 \in F(I)$ ve $\delta > 0$ olduğundan

$$\frac{1}{H_r} \left| \left\{ k \in I_r' : p_k(x_k - x_0) \notin W \right\} \right| < \frac{\delta}{2}$$

benzer olarak

$$\frac{1}{H_r} \left| \left\{ k \in I_r' : p_k(x_k - y_0) \notin W \right\} \right| < \frac{\delta}{2}$$

şeklinde seçilebilir. $A_1 \cap A_2 = A$ olsun bu durumda her $k \in A$ için

$$p_k(x_0 - y_0) = p_k(x_0 - x_k + x_k - y_0) = p_k(x_k - x_0) + p_k(x_k - y_0) \in W + W \subseteq Y \subseteq V$$

dir. Böylece

$$\frac{1}{H_r} \left| \left\{ k \in I_r' : p_k(x_0 - y_0) \notin W \right\} \right|$$

$$< \frac{1}{H_r} \left| \left\{ k \in I_r' : p_k(x_k - x_0) \notin W \right\} \right| + \frac{1}{H_r} \left| \left\{ k \in I_r' : p_k(x_k - y_0) \notin W \right\} \right| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} < \delta$$

olup böylelikle

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{H_r} \left| \left\{ k \in I_r' : p_k\left(x_k - y_0\right) \notin V \right\} \right| < \delta \right\} \in F(I)$$

olur. Son olarak (X,τ) Hausdorff ve V, sıfırın her $\tau-$komşuluğu olduğundan sıfırın tüm V $\tau-$komşuluklarının ara kesiti $\{\theta\}$ tek nokta kümesidir. Böylece $x_0 - y_0 = \theta$, yani $x_0 = y_0$ elde edilir.

ii. Kabul edelim ki $S^I_{(\bar{N},\theta)}(\tau) - \lim x = x_0$ ve sıfırın bir V $\tau-$komşuluğu olsun. Bu durumda bir $Y \subseteq V$ olacak şekilde bir $Y \in \mathcal{N}_{sol}$ vardır. $S^I_{(\bar{N},\theta)}(\tau) - \lim x = x_0$ olduğundan herhangi bir $\delta > 0$ için

$$B = \left\{ r \in \mathbb{N} : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{H_r} \left| \left\{ k \in I_r' : p_k\left(x_k - x_0\right) \notin V \right\} \right| < \delta \right\} \in F(I)$$

yazılabilir. İlk olarak $|\alpha| < 1$ olsun. Y denge kümesi olduğundan $p_k\left(x_k - x_0\right) \in Y$ ise $\alpha p_k\left(x_k - x_0\right) \in Y$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} \left\{ k \in I_r' : p_k\left(x_k - y_0\right) \in Y \right\} &\subseteq \left\{ k \in I_r' : \alpha p_k\left(x_k - y_0\right) \in Y \right\} \\ &\subseteq \left\{ k \in I_r' : \alpha p_k\left(x_k - y_0\right) \in V \right\} \end{aligned}$$

ve buradan sıfırın her bir V $\tau-$komşuluğu için

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{H_r} \left| \left\{ k \in I_r' : \alpha p_k\left(x_k - x_0\right) \notin V \right\} \right| < \delta \right\} \in F(I)$$

elde edilir. Şimdi $|\alpha|>1$ olsun ve α ifadesi $|\alpha|$ dan daha büyük veya eşit olan en küçük tamsayıyı belirtsin. $\alpha \; W \subseteq Y$ olacak şekilde bir $W \in \mathcal{N}_{sol}$ mevcuttur. $S^{I}_{(\bar{N},\theta)}(\tau)-\lim x = x_0$ olduğundan benzer şekilde

$$B=\left\{ r\in \mathbb{N}:\lim_{r\to\infty}\frac{1}{H_r}\left|\left\{ k\in I_r{}':p_k\left(x_k-x_0\right)\notin V\right\}\right|<\delta \right\}\in F(I)$$

yazabiliriz. Buradan

$$\left|\alpha p_k\left(x_k-x_0\right)\right|=|\alpha|\left|p_k\left(x_k-x_0\right)\right|\leq \; \alpha \; \left|p_k\left(x_k-x_0\right)\right|\in \; \alpha \; W\subseteq Y\subseteq V$$

elde edilir. Y kümesi katı olduğundan $\alpha p_k\left(x_k-x_0\right)\in Y$ iken $\alpha p_k\left(x_k-x_0\right)\in V$ yazılabilir. Böylelikle sıfırın her bir V $\tau-$komşuluğu için

$$\left\{ r\in \mathbb{N}:\lim_{r\to\infty}\frac{1}{H_r}\left|\left\{ k\in I_r{}':\alpha p_k\left(x_k-x_0\right)\notin V\right\}\right|<\delta \right\}\in F(I)$$

elde edilir. Buradan her $\alpha\in\mathbb{R}$ için $S^{I}_{(\bar{N},\theta)}(\tau)-\lim \alpha x=\alpha x_0$ olduğu görülür.

iii. V sıfırın keyfi bir $\tau-$komşuluğu olsun. Bu durumda $Y\subseteq V$ olacak şekilde $Y\in\mathcal{N}_{sol}$ vardır. $W+W\subseteq Y$ olacak şekilde başka bir $W\in\mathcal{N}_{sol}$ seçelim. $S^{I}_{(\bar{N},\theta)}(\tau)-\lim x = x_0$ ve $S^{I}_{(\bar{N},\theta)}(\tau)-\lim y = y_0$ olduğundan

$$C_1=\left\{ r\in \mathbb{N}:\lim_{r\to\infty}\frac{1}{H_r}\left|\left\{ k\in I_r{}':\alpha p_k\left(x_k-x_0\right)\notin V\right\}\right|<\frac{\delta}{2} \right\}\in F(I)$$

ve

$$C_2=\left\{ r\in \mathbb{N}:\lim_{r\to\infty}\frac{1}{H_r}\left|\left\{ k\in I_r{}':\alpha p_k\left(y_k-y_0\right)\notin V\right\}\right|<\frac{\delta}{2} \right\}\in F(I)$$

yazılabilir. $C_1\cap C_2=C$ olsun ve her $r\in C$ için;

$$p_k\left(\left(x_k+y_k\right)-\left(x_0+y_0\right)\right)=p_k\left(x_k-x_0\right)+p_k\left(y_k-y_0\right)\in W+W\subseteq Y\subseteq V$$

buradan,

$$\frac{1}{H_r}\left|\left\{k\in I_r{}':p_k\left(\left(x_k-y_k\right)+\left(x_0-y_0\right)\right)\notin W\right\}\right|\le\frac{1}{H_r}\left|\left\{k\in I_r{}':p_k\left(x_k-x_0\right)\notin W\right\}\right|$$

$$+\frac{1}{H_r}\left|\left\{k\in I_r{}':p_k\left(y_k-y_0\right)\notin W\right\}\right|<\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta$$

dir. Sonuç olarak,

$$\left\{r\in\mathbb{N}:\lim_{r\to\infty}\frac{1}{H_r}\left|\left\{k\in I_r{}':p_k\left(\left(x_k-y_k\right)+\left(x_0-y_0\right)\right)\notin V\right\}\right|<\delta\right\}$$

$$\subseteq\left\{r\in\mathbb{N}:\lim_{r\to\infty}\frac{1}{H_r}\left|\left\{k\in I_r{}':p_k\left(y_k-y_0\right)\notin W\right\}\right|<\frac{\delta}{2}\right\}$$

$$\cup\left\{r\in\mathbb{N}:\lim_{r\to\infty}\frac{1}{H_r}\left|\left\{k\in I_r{}':p_k\left(x_k-x_0\right)\notin W\right\}\right|<\frac{\delta}{2}\right\}$$

elde edilir. $S^I_{(\bar{N},\theta)}(\tau)-\lim x=x_0$ ve $S^I_{(\bar{N},\theta)}(\tau)-\lim y=y_0$ olduğundan $C_1,C_2\in F(I)$ dir. Bu da gösterir ki $S^I_{(\bar{N},\theta)}(\tau)-\lim x+y=x_0+y_0$ dir.

Teorem 4.2.8 (X,τ) bir yerel katı Riesz uzayı ve $\theta=\{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. Eğer bir $x=(x_k)$ dizisi $S^I_{(\bar{N},\theta)}(\tau)-$yakınsak ve (p_k) sınırlı bir dizi ise $x=(x_k)$ dizisi $S^I_{(\bar{N},\theta)}(\tau)-$ sınırlıdır.

İspat: Kabul edelim ki $x=(x_k)$ $S^I_{(\bar{N},\theta)}(\tau)-$yakınsak ve (p_k) sınırlı bir dizi olsun. V sıfırın keyfi bir $\tau-$komşuluğu olsun. Bu durumda $Y\subseteq V$ olacak şekilde $Y\in\mathcal{N}_{sol}$ vardır. $W+W\subseteq Y$ olacak şekilde başka bir $W\in\mathcal{N}_{sol}$ seçelim. $S^I_{(\bar{N},\theta)}(\tau)-\lim x=x_0$ olduğundan

$$D=\left\{r\in\mathbb{N}:\lim_{r\to\infty}\frac{1}{H_r}\left|\left\{k\in I_r':p_k\left(x_k-x_0\right)\notin W\right\}\right|\geq\delta\right\}\in I$$

yazılabilir. W yutan bir küme olduğundan $ax_0\in W$ olacak şekilde bir $a>0$ reel sayısı mevcuttur. $0<b\leq 1$ ve $b\leq a$ olacak şekilde bir b seçilsin. (p_k) sınırlı olduğundan tüm $k\in\mathbb{N}$ için $p_k\leq M$ olacak şekilde bir $M=\frac{a}{b}>0$ sayısı mevcuttur. Bu durumda tüm $k\in\mathbb{N}$ için $bp_k\leq a$ yazılabilir. W dengeli küme olduğundan dolayı $p_k(x_k-x_0)\in W$ iken $bp_k(x_k-x_0)\in W$ dir. Buradan her bir $k\in\mathbb{N}\setminus D$ için

$$bp_kx_k=bp_k(x_k-x_0)+bp_kx_0\in W+W\subseteq Y\subseteq V$$

elde edilir. Böylelikle

$$\left\{r\in\mathbb{N}:\lim_{r\to\infty}\frac{1}{H_r}\left|\left\{k\in I_r':bp_kx_k\notin V\right\}\right|\geq\delta\right\}\in I$$

dir. Bu $x=\left(x_k\right)$ dizisinin $S^I_{(\bar{N},\theta)}\left(\tau\right)-$ sınırlı olduğunu gösterir.

Teorem 4.2.9 $\left(X,\tau\right)$ bir yerel katı Riesz uzayı ve $\theta=\left\{k_r\right\}$ bir lacunary dizisi olsun. $\left(x_k\right)$, $\left(y_k\right)$, $\left(z_k\right)\in X$ olmak üzere eğer aşağıdakiler sağlanıyorsa $S^I_{(\bar{N},\theta)}\left(\tau\right)-\lim y=x_0$ dir.

i. Her bir $k\in\mathbb{N}$ için $x_k\leq y_k\leq z_k$ ve

ii. $S^I_{(\bar{N},\theta)}\left(\tau\right)-\lim x=x_0=S^I_{(\bar{N},\theta)}\left(\tau\right)-\lim z=x_0$.

İspat: V sıfırın keyfi bir $\tau-$komşuluğu olsun. Bu durumda $Y\subseteq V$ olacak şekilde $Y\in\mathcal{N}_{sol}$ vardır. $W+W\subseteq Y$ olacak şekilde başka bir $W\in\mathcal{N}_{sol}$ seçelim. İkinci şart sağlandığından dolayı $E_1,E_2\in F(I)$ olacak şekilde

$$E_1 = \left\{ r \in \mathbb{N} : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{H_r} \left| \left\{ k \in I_r' : p_k\left(x_k - x_0\right) \notin W \right\} \right| < \delta \right\} \in F(I)$$

ve

$$E_2 = \left\{ r \in \mathbb{N} : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{H_r} \left| \left\{ k \in I_r' : p_k\left(z_k - x_0\right) \notin W \right\} \right| < \delta \right\} \in F(I)$$

yazılabilir. $E = E_1 \cap E_2 \in F(I)$ olsun. Birinci şarttan dolayı tüm $k \in E$ için

$$p_k(x_k - x_0) \leq p_k(y_k - x_0) \leq p_k(z_k - x_0)$$

elde edilir. Böylelikle

$$| y_k - x_0 | \leq | x_k - x_0 | + | z_k - x_0 | \in W + W \subseteq Y \subseteq V$$

olarak yazılır ve buradan da Y katı olduğundan dolayı $p_k(y_k - x_0) \in Y \subseteq V$ dir. Sonuç olarak

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{H_r} \left| \left\{ k \in I_r' : p_k\left(y_k - x_0\right) \notin W \right\} \right| < \delta \right\} \in F(I)$$

olduğu görülür. Sonuç olarak $S^I_{(\bar{N},\theta)}(\tau) - \lim y = x_0$ dır.

Teorem 4.2.10 (X,τ) bir yerel katı Riesz uzayı ve $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. Eğer $\liminf_r Q_r > 1$ olması durumunda $S^I_{(\bar{N})}(\tau) \subseteq S^I_{(\bar{N},\theta)}(\tau)$ kapsama bağıntısı vardır.

İspat: Kabul edelim ki $\liminf_r Q_r > 1$ olsun. Bu durumda yeterince büyük r değerleri için $Q_r \geq 1 + \lambda$ olacak şekilde $\lambda > 0$ sayısı vardır. Burada $\liminf_r Q_r > 1$ olduğundan dolayı

$$\frac{H_r}{P_{k_r}} = 1 - \frac{P_{k_{r-1}}}{P_{k_r}} = 1 - \frac{1}{Q_r} \geq \frac{\lambda}{1+\lambda}$$

dir. $S^I_{(\bar{N})}(\tau) - \lim x = x_0$ ve V sıfırın keyfi bir $\tau -$komşuluğu olsun. $S^I_{(\bar{N})}(\tau) - \lim x = x_0$ olduğu için

$$\left\{ r\in\mathbb{N} : \frac{1}{P_{k_r}}\left|\left\{ k\in P_{k_r} : p_k\left(x_k-x_0\right)\notin V\right\}\right|<\delta\right\}$$

yazılabilir. Böylece tüm $r>r_0$ için

$$\frac{1}{P_{k_r}}\left|\left\{ k\leq P_{k_r} : p_k\left(x_k-x_0\right)\notin V\right\}\right|\geq\frac{1}{P_{k_r}}\left|\left\{ k_{r-1}<k\leq k_r : p_k\left(x_k-x_0\right)\notin V\right\}\right|$$

$$=\frac{H_r}{P_{k_r}}\left(\frac{1}{H_r}\left|\left\{ k\in I_r' : p_k\left(x_k-x_0\right)\notin V\right\}\right|\right)\geq\frac{\lambda}{\lambda+1}\left(\frac{1}{H_r}\left|\left\{ k\in I_r' : p_k\left(x_k-x_0\right)\notin V\right\}\right|\right)$$

yani herhangi bir $\delta>0$ için

$$\left\{ r\in\mathbb{N} : \frac{\lambda}{\lambda+1}\frac{1}{H_r}\left|\left\{ k\in I_r' : p_k\left(x_k-x_0\right)\notin V\right\}\right|<\delta\right\}$$

$$\subseteq\left\{ r\in\mathbb{N} : \frac{1}{P_{k_r}}\left|\left\{ k\leq P_{k_r} : p_k\left(x_k-x_0\right)\notin V\right\}\right|<\delta\right\}$$

$S^I_{(\bar{N})}(\tau)-\lim x=x_0$ olduğundan kapsama bağıntısının sağ tarafı $F(I)$ ya aittir. Sonuç olarak $S^I_{(\bar{N},\theta)}(\tau)-\lim x=x_0$ elde edilir. Böylece $S^I_{(\bar{N})}(\tau)\subseteq S^I_{(\bar{N},\theta)}(\tau)$ olduğu görülür.

Teorem 4.2.11 (X,τ) bir yerel katı Riesz uzayı ve $x=(x_k)\in X$ bir dizi olsun. Herhangi bir $\theta=\{k_r\}$ lacunary dizisi olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

i. Eğer tüm $k\in\mathbb{N}$ için $p_k\leq 1$ ise $S^I_{(\theta)}(\tau)\subseteq S^I_{(\bar{N},\theta)}(\tau)$ dir.

ii. Eğer tüm $k\in\mathbb{N}$ için $1\leq p_k$ ve $\frac{H_r}{h_r}$ üstten sınırlı ise $S^I_{(\bar{N},\theta)}(\tau)\subseteq S^I_{(\theta)}(\tau)$ dir.

İspat:

i. Eğer tüm $k\in\mathbb{N}$ için $p_k\leq 1$ ise tüm $r\in\mathbb{N}$ için $H_r\leq h_r$ dir. Bu durumda tüm $r\in\mathbb{N}$ için

$0 < M \leq \dfrac{H_r}{h_r} < 1$ olacak şekilde bir M sabiti vardır. Yerel katı Riesz uzayında bir $x = (x_k)$ dizisi ve $S_\theta^I(\tau) - \lim x = x_0$ olsun. V sıfırın keyfi bir $\tau -$komşuluğu olduğundan

$$\frac{1}{H_r}\left|\left\{k \in I_r' : p_k\left(x_k - x_0\right) \notin V\right\}\right|$$

$$= \frac{1}{H_r}\left|\left\{P_{k_{r-1}} < k \leq k_r : p_k\left(x_k - x_0\right) \notin V\right\}\right|$$

$$\leq \frac{1}{M}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k_{r-1} < k \leq k_r : p_k\left(x_k - x_0\right) \notin V\right\}\right|$$

$$= \frac{1}{M}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : \left(x_k - x_0\right) \notin V\right\}\right|$$

yani,

$$\frac{1}{H_r}\left|\left\{k \in I_r' : p_k\left(x_k - x_0\right) \notin V\right\}\right| \leq \frac{1}{M}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : \left(x_k - x_0\right) \notin V\right\}\right|$$

yazılabilir. Buradan da $\delta > 0$ için

$$\left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{H_r}\left|\left\{k \in I_r' : p_k\left(x_k - x_0\right) \notin V\right\}\right| \geq \delta\right\}$$

$$\subseteq \left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{M}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : \left(x_k - x_0\right) \notin V\right\}\right|\right\}$$

elde edilir. $S_\theta^I(\tau) - \lim x = x_0$ olduğundan kapsamanın sağ tarafı $F(I)$ ya aittir. Bu ise sol tarafında $F(I)$ ya ait olmasını gerektirir. Sonuç olarak $S_{(\bar{N},\theta)}^I(\tau) - \lim x = x_0$ elde edilir.

ii. Eğer tüm $k \in \mathbb{N}$ için $1 \le p_k$ ise bu durumda tüm $r \in \mathbb{N}$ için $h_r \le H_r$ dir. $\frac{H_r}{h_r}$ üstten sınırlı ise tüm $r \in \mathbb{N}$ için $1 \le \frac{H_r}{h_r} \le N$ olacak şekilde bir N sabiti vardır. Kabul edelim ki yerel katı Riesz uzayında bir $x = (x_k)$ dizisi ve $S^I_{(\bar{N},\theta)}(\tau) - \lim x = x_0$ olsun. V sıfırın keyfi bir $\tau-$ komşuluğu olduğundan

$$\frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : p_k\left(x_k - x_0\right) \notin V\right\}\right|$$

$$= \frac{1}{h_r}\left|\left\{k_{r-1} < k \le k_r : \left(x_k - x_0\right) \notin V\right\}\right|$$

$$\le \frac{1}{N}\frac{1}{H_r}\left|\left\{P_{k_{r-1}} < k \le k_r : p_k\left(x_k - x_0\right) \notin V\right\}\right|$$

$$= \frac{1}{N}\frac{1}{H_r}\left|\left\{k \in I_r' : p_k\left(x_k - x_0\right) \notin V\right\}\right|$$

yani,

$$\frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : p_k\left(x_k - x_0\right) \notin V\right\}\right| \le \frac{1}{N}\frac{1}{H_r}\left|\left\{k \in I_r' : p_k\left(x_k - x_0\right) \notin V\right\}\right|$$

yazılabilir. Buradan da $\delta > 0$ için

$$\left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : \left(x_k - x_0\right) \notin V\right\}\right|\right\}$$

$$\subseteq \left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{N}\frac{1}{H_r}\left|\left\{k \in I_r' : p_k\left(x_k - x_0\right) \notin V\right\}\right| \ge \delta\right\}$$

elde edilir. $S^{I}_{(\bar{N},\theta)}(\tau)-\lim x = x_0$ olduğundan kapsamanın sağ tarafı $F(I)$ ya aittir. Bu ise sol tarafın da $F(I)$ ya ait olmasını gerektirir. Sonuç olarak $S^{I}_{\theta}(\tau)-\lim x = x_0$ elde edilir.

4.3. Yerel Katı Riesz Uzaylarında Çift Dizilerin "g" Ağırlık Fonksiyonu Yardımıyla Tanımlanmış $I-$İstatistiksel Yakınsaklığı ve $I-$Lacunary İstatistiksel Yakınsaklığı

Bu bölümde, yerel katı Riesz uzaylarında çift indisli dizilerin bir "g" ağırlık fonksiyonu yardımıyla tanımlanmış $I-$istatistiksel yakınsaklık kavramı verilmiş ve diğer bazı yakınsaklık türleriyle aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Bunun için öncelikle Tanım 3.3.12 de Balcerzak [45]'ın tanımından esinlenerek "g" ağırlıklı yoğunluk tanımı çift indisli dizilere genişletilecektir.

Tanım 4.3.1 $(m,n)\in K\subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ve $g\in G$ olsun ve $K_{m,n}$, $\{(k,l)\in K : 1\le k\le m \text{ ve } 1\le l\le n\}$ kümesinin eleman sayısını belirtsin. K kümesinin ağırlıklı üst ve alt çift yoğunluğu sırasıyla,

$$\underline{d}_{g,g}(K) = P-\liminf_{m,n\to\infty}\frac{K(m,n)}{g(m)g(n)}$$

ve

$$\overline{d}_{g,g}(K) = P-\limsup_{m,n\to\infty}\frac{K(m,n)}{g(m)g(n)}$$

şeklinde ifade edilecektir. Eğer $P-\lim\limits_{m,n\to\infty}\frac{K(m,n)}{g(mn)}$ var olması durumunda; yani Pringsheim anlamında limitinin var olması durumunda K kümesinin ağırlıklı çift yoğunluğu vardır denilir ve $d_{g,g}(K)$ ile gösterilir.

Tanım 4.3.2 (X,τ) bir yerel katı Riesz uzayı ve $x=(x_{k,l})\in X$ bir çift indisli dizi olsun. Eğer sıfırın her V $\tau-$komşuluğu ve $\delta>0$ için,

$$\left\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{g(m)g(n)}\left|\{(k,l),k\le m \text{ ve } l\le n: x_{k,l}-x_0\notin V\}\right|\ge\delta\right\}\in I$$

yani,

$$\left\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{g(m)g(n)}\left|\{(k,l),k\le m \text{ ve } l\le n: x_{k,l}-x_0\notin V\}\right|<\delta\right\}\in F(I)$$

olacak şekilde bir $x_0\in\mathbb{R}$ sayısı varsa $x=(x_{k,l})\in X$ dizisine $S_{g,g}(I)(\tau)-$yakınsaktır denir. $x_{k,l}\to x_0(S_{g,g}(I)(\tau))$ veya $x_{k,l}\overset{S_{g,g}(I)(\tau)}{\to}x_0$ şeklinde gösterilir. Tüm ağırlıklı yakınsak çift indisli dizilerin uzayı $S_{g,g}(I)(\tau)-$ ile gösterilecektir.

Uyarı 4.3.3 $I_{fin}=\{A\subset\mathbb{N}\times\mathbb{N}, A \text{ sonlu bir küme}\}$ ve $g(m)=m,\ g(n)=n$ olması durumunda $S_{g,g}(I)(\tau)-$yakınsaklık, [44] nolu kaynaktaki $S_2(\tau)-$ yakınsaklığa indirgenir.

Tanım 4.3.4 (X,τ) bir yerel katı Riesz uzayı ve $x=(x_{k,l})\in X$ bir çift indisli dizi olsun. Eğer sıfırın her V, $\tau-$komşuluğu ve $\delta>0$ için,

$$\left\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{g(m)g(n)}\left|\{k\le m \text{ ve } l\le n: \lambda x_{k,l}\notin V\}\right|\ge\delta\right\}\in I$$

olacak şekilde bir $\lambda>0$ sayısı mevcut ise $x=(x_{k,l})\in X$ dizisi $S_{g,g}(I)(\tau)-$sınırlıdır denir.

Teorem 4.3.5. (X,τ) bir Hausdorff yerel katı Riesz uzayı ve $x=(x_{k,l}),\ y=(y_{k,l})\in X$ çift indisli diziler olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

i. Eğer $S_{g,g}(I)(\tau)-\lim x_{k,l}=x_0$ ve $S_{g,g}(I)(\tau)-\lim x_{k,l}=y_0$ ise $x_0=y_0$ dır.

ii. Eğer $S_{g,g}(I)(\tau)-\lim x_{k,l}=x_0$ ve $\alpha\in\mathbb{R}$ için $S_{g,g}(I)(\tau)-\lim \alpha x_{k,l}=\alpha x_0$ dir.

iii. Eğer $S_{g,g}(I)(\tau)-\lim x_{k,l}=x_0$ ve $S_{g,g}(I)(\tau)-\lim y_{k,l}=y_0$ ise $S_{g,g}(I)(\tau)-\lim(x_{k,l}+y_{k,l})=x_0+y_0$ dir.

İspat:

i. Kabul edelim ki $S_{g,g}(I)(\tau)-\lim x_{k,l}=x_0$ ve $S_{g,g}(I)(\tau)-\lim x_{k,l}=y_0$ olsun. V, sıfırın keyfi bir $\tau-$komşuluğu olsun. Bu durumda $Y\subseteq V$ olacak şekilde bir $Y\in\mathcal{N}_{sol}$ mevcuttur. $W+W\subseteq Y$ olacak şekilde başka bir $W\in\mathcal{N}_{sol}$ seçilsin. Bu durumda;

$$A_3=\{k\le m \text{ ve } l\le n : x_{k,l}-x_0\notin V\}$$

ve

$$A_4=\{k\le m \text{ ve } l\le n : x_{k,l}-y_0\notin V\}$$

yazılabilir. Burada herhangi $\delta>0$ ve $(m,n)\to\infty$ için limit alınması durumunda $A_1,A_2\in I$ dır. $A_3\cap A_4=A_5$ olmaktadır. Şimdi tüm $(k,l)\in A_5$ olsun bu durumda,

$$x_0-y_0=x_0-x_{k,l}+x_{k,l}-y_0\in W+W\subseteq Y\subseteq V$$

elde edilir. Böylece sıfırın her V, $\tau-$komşuluğu için $(x_0-y_0)\in V$ dir. (X,τ) Hausdorff olduğundan sıfırın tüm V $\tau-$komşuluğunun arakesiti tek nokta kümesidir $\{\theta\}$. Böylece $x_0-y_0=\theta$ olduğundan $x_0=y_0$ elde edilir.

ii. V, sıfırın keyfi bir $\tau-$komşuluğu ve $S_{g,g}(I)(\tau)-\lim x_{k,l}=x_0$ olsun. Bu durumda $Y\subseteq V$ olacak şekilde bir $Y\in\mathcal{N}_{sol}$ mevcuttur. Bu durumda;

$$B=\left\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{g(m)g(n)}\left|\{(k,l),k\le m \text{ ve } l\le n : x_{k,l}-x_0\notin Y\}\right|<\delta\right\}\in F(I)$$

olmak üzere her $(m,n)\in B$ ve $\delta>0$ için

$$\frac{1}{g(m)g(n)}\left|\left\{(k,l),k\leq m \text{ ve } l\leq n: x_{k,l}-x_0\in V\right\}\right|>1-\delta$$

yazılabilir. İlk olarak $|\alpha|<1$ olsun. Y dengeli küme olduğundan $(x_k-x_0)\in Y$ ise $\alpha(x_k-x_0)\in Y$ dir. Böylece

$$\begin{aligned}&\left\{(k,l),k\leq m \text{ ve } l\leq n: x_{k,l}-x_0\in Y\right\}\\ &\subseteq\left\{(k,l),k\leq m \text{ ve } l\leq n: \alpha\left(x_{k,l}-x_0\right)\in Y\right\}\\ &\subseteq\left\{(k,l),k\leq m \text{ ve } l\leq n: \alpha\left(x_{k,l}-x_0\right)\in V\right\}\end{aligned}$$

ve $(m,n)\in B$ için

$$\begin{aligned}&\frac{1}{g(m)g(n)}\left|\left\{(k,l),k\leq m \text{ ve } l\leq n: \alpha\left(x_{k,l}-x_0\right)\in V\right\}\right|\\ &\geq\frac{1}{g(m)g(n)}\left|\left\{(k,l),k\leq m \text{ ve } l\leq n: x_{k,l}-x_0\in V\right\}\right|>1-\delta\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\left\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{g(m)g(n)}\left|\left\{(k,l),k\leq m \text{ ve } l\leq n: \alpha(x_{k,l}-x_0)\notin V\right\}\right|<\delta\right\}\in F(I)$$

olduğu görülür. Şimdi α ifadesi $|\alpha|$ dan daha büyük veya eşit olan en küçük tamsayıyı belirtsin. $\alpha \; W \subseteq Y$ olacak şekilde bir $W \in \mathcal{N}_{sol}$ mevcuttur. $S_{g,g}(I)(\tau)-\lim x_{k,l}=x_0$ olduğundan $\delta > 0$ için,

$$B=\left\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{g(m)g(n)}\left|\{(k,l),k\leq m \text{ ve } l\leq n: x_{k,l}-x_0\notin W\}\right|<\delta\right\}\in F(I)$$

yazabiliriz. Böylece sıfırın her bir V $\tau-$komşuluğu için

$$\left|\alpha\left(x_{k,l}-x_0\right)\right|=|\alpha|\left|x_{k,l}-x_0\right|\leq \alpha \; \left|x_{k,l}-x_0\right|\in \alpha \; W\subseteq Y\subseteq V$$

elde edilir. Y kümesi katı olduğundan $\alpha\left(x_k-x_0\right)\in Y$ iken $\alpha\left(x_k-x_0\right)\in V$ yazılabilir. Sonuç olarak

$$\left\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{g(m)g(n)}\left|\{(k,l),k\leq m \text{ ve } l\leq n: \alpha x_{k,l}-\alpha x_0\notin W\}\right|<\delta\right\}\in F(I)$$

elde edilir. Bu ise $S^{I}_{g,g}(I)(\tau)-\lim \alpha x_{k,l}=\alpha x_0$ olduğunu gösterir.

iii. V sıfırın keyfi bir $\tau-$komşuluğu olsun. Bu durumda $Y\subseteq V$ olacak şekilde $Y\in\mathcal{N}_{sol}$ vardır. $W+W\subseteq Y$ olacak şekilde başka bir $W\in\mathcal{N}_{sol}$ seçelim. $S_{g,g}(I)(\tau)-\lim x_{k,l}=x_0$ ve $S_{g,g}(I)(\tau)-\lim y_{k,l}=y_0$ olduğundan

$$C_1=\left\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{g(m)g(n)}\left|\{(k,l),k\leq m \text{ ve } l\leq n: x_{k,l}-x_0\notin W\}\right|<\frac{\delta}{2}\right\}\in F(I)$$

ve

$$C_2=\left\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{g(m)g(n)}\left|\{(k,l),k\leq m \text{ ve } l\leq n: y_{k,l}-y_0\notin W\}\right|<\frac{\delta}{2}\right\}\in F(I)$$

olarak yazılabilir. $C_1 \cap C_2 = C$ olsun ve her $(m,n) \in C$ için;

$$\left(\left(x_{k,l} + y_{k,l}\right) - \left(x_0 + y_0\right)\right) = \left(x_{k,l} - x_0\right) + \left(y_{k,l} - y_0\right) \in W + W \subseteq Y \subseteq V$$

buradan,

$$\frac{1}{g(m)g(n)}\left|\left\{(k,l), k \leq m \text{ ve } l \leq n : \left(x_{k,l} + y_{k,l}\right) - \left(x_0 + y_0\right) \notin W\right\}\right|$$

$$\leq \frac{1}{g(m)g(n)}\left|\left\{(k,l), k \leq m \text{ ve } l \leq n : x_{k,l} - x_0 \notin W\right\}\right|$$

$$+ \frac{1}{g(m)g(n)}\left|\left\{(k,l), k \leq m \text{ ve } l \leq n : y_{k,l} - y_0 \notin W\right\}\right| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\left\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \frac{1}{g(m)g(n)}\left|\left\{(k,l), k \leq m \text{ ve } l \leq n : \left(x_{k,l} + y_{k,l}\right) - \left(x_0 + y_0\right) \notin W\right\}\right| < \delta\right\} \in F(I)$$

olur ve V sıfırın keyfi bir $\tau-$komşuluğu olduğundan $S_{g,g}^{I}(I)(\tau) - \lim x_{k,l} + y_{k,l} = x_0 + y_0$ elde edilir ve bu ispatı tamamlar.

Teorem 4.3.6 (X,τ) bir yerel katı Riesz uzayı ve $x = \left(x_{k,l}\right) \in X$ çift indisli dizi olsun. Eğer $x = \left(x_{k,l}\right)$ dizisi $S_{g,g}^{\tau}(I)-$yakınsak ise $S_{g,g}^{\tau}(I)-$sınırlıdır.

İspat: Kabul edelim ki $x = \left(x_{k,l}\right)$ dizisi $S_{g,g}^{\tau}(I)-$yakınsak olsun. V sıfırın keyfi bir $\tau-$komşuluğu olsun. Bu durumda $Y \subseteq V$ olacak şekilde $Y \in \mathcal{N}_{sol}$ vardır. $W + W \subseteq Y$ olacak şekilde başka bir $W \in \mathcal{N}_{sol}$ seçilsin. $x = \left(x_{k,l}\right)$ dizisi $S_{g,g}^{\tau}(I)-$yakınsak olduğundan;

$$D = \left\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \frac{1}{g(m)g(n)}\left|\left\{(k,l), k \leq m \text{ ve } l \leq n : x_{k,l} - x_0 \notin W\right\}\right| \geq \delta\right\} \in I$$

yazılabilir. W yutan bir küme olduğundan $ax_0 \in W$ olacak şekilde bir $a > 0$ reel sayısı mevcuttur. $0 < b \leq 1$ ve $b \leq a$ olacak şekilde bir b seçilsin. W dengeli küme olduğundan dolayı $(x_k - x_0) \in W$ iken $b(x_k - x_0) \in W$ dir. Buradan her bir $\{k,l\} \in \mathbb{N} \setminus D$ için

$$bx_k = b(x_k - x_0) + bx_0 \in W + W \subseteq Y \subseteq V$$

elde edilir. Böylelikle

$$\left\{ (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \frac{1}{g(m)g(n)} \left| \{ (k,l), k \leq m \text{ ve } l \leq n : bx_{k,l} \notin V \} \right| \geq \delta \right\} \in I$$

dir. Bu $x = (x_{k,l})$ dizisinin $S_{g,g}^{\tau}(I)-$ sınırlı olduğunu gösterir.

Tanım 4.3.7 (X,τ) bir yerel katı Riesz uzayı ve $x = (x_{k,l})$ bu uzayda bir dizi olsun. Eğer sıfırın her bir V, $\tau-$komşuluğu, $\delta > 0$ ve tüm $k,p \geq n_0$; $l,q \geq m_0$ için

$$\left\{ (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \frac{1}{g(m)g(n)} \left| \{ (k,l), k \leq m \text{ ve } l \leq n : x_{k,l} - x_{p,q} \notin V \} \right| \geq \delta \right\} \in I$$

olacak şekilde $(n_0, m_0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa $x = (x_{k,l})$ dizisi $S_{g,g}^{\tau}(I)-$Cauchy olarak adlandırılır.

Teorem 4.3.8 (X,τ) bir yerel katı Riesz uzayı ve $x = (x_{k,l})$ bu uzayda bir dizi olsun. Eğer $x = (x_{k,l})$ dizisi $S_{g,g}^{\tau}(I)-$yakınsak ise $S_{g,g}^{\tau}(I)-$Cauchy dir.

İspat: (X,τ) bir yerel katı Riesz uzayı $x = (x_{k,l})$ dizisi de x_0'a $S_{g,g}^{\tau}(I)-$yakınsak olsun. V sıfırın keyfi bir $\tau-$komşuluğu olsun. Bu durumda $Y \subseteq V$ olacak şekilde $Y \in \mathcal{N}_{sol}$ vardır. $W + W \subseteq Y$ olacak şekilde başka bir $W \in \mathcal{N}_{sol}$ seçelim. $0 < \delta < 1$ olsun bu durumda;

$$E=\left\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{g(m)g(n)}\left|\left\{k\le m \text{ ve } l\le n: x_{k,l}-x_0\notin W\right\}\right|<\delta\right\}\in F(I)$$

yazılır. Tüm $(m,n)\in E$ için

$$\frac{1}{g(m)g(n)}\left|\left\{k\le m \text{ ve } l\le n: x_{k,l}-x_0\notin W\right\}\right|<\delta$$

yani,

$$\frac{1}{g(m)g(n)}\left|\left\{k\le m \text{ ve } l\le n: x_{k,l}-x_0\in W\right\}\right|>1-\delta$$

elde edilir. Buradan $p,q\in\left\{(k,l),k\le m \text{ and } l\le n: x_{k,l}-x_0\in W\right\}$ için

$$x_{k,l}-x_{p,q}=x_{k,l}-x_0+x_0-x_{p,q}\in W+W\subseteq Y\subseteq V$$

yazılır. Sonuç olarak $\delta>0$ için

$$\left\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{g(m)g(n)}\left|\left\{(k,l),k\le m \text{ ve } l\le n: x_{k,l}-x_{p,q}\notin W\right\}\right|<\delta\right\}\in F(I)$$

elde edilir ve bu $x=(x_{k,l})$ dizisinin $S_{g,g}(I)(\tau)-$Cauchy olduğunu gösterir.

Teorem 4.3.9 (X,τ) bir yerel katı Riesz uzayı ve $g_1,g_2\in G$ olsun. Tüm $m\ge m_0$ ve $n\ge n_0$ için $\dfrac{g_1(m)g_1(n)}{g_2(m)g_2(n)}\le M$ olacak şekilde $M>0$ ve $(m_o,n_0)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $S_{g_1,g_1}(I)(\tau)\subset S_{g_2,g_2}(I)(\tau)$ kapsama bağıntısı sağlanır.

İspat: Kabul edelim ki (X,τ) bir yerel katı Riesz uzayı $x=(x_{k,l})$ dizisi de x_0'a $S^{\tau}_{g_1,g_1}(I)-$ yakınsak olsun. Sıfırın keyfi bir V $\tau-$komşuluğu olsun. Bu durumda $m\ge m_0$ ve $n\ge n_0$ için

$$\frac{1}{g_2(m)g_2(n)}\left|\left\{(k,l), k\leq m \text{ ve } l\leq n : x_{k,l}-x_0\notin V\right\}\right|$$

$$=\frac{g_1(m)g_1(n)}{g_2(m)g_2(n)}\frac{1}{g_1(m)g_1(n)}\left|\left\{(k,l), k\leq m \text{ ve } l\leq n : x_{k,l}-x_0\notin V\right\}\right|$$

$$\leq M\frac{1}{g_1(m)g_1(n)}\left|\left\{(k,l), k\leq m \text{ ve } l\leq n : x_{k,l}-x_0\notin V\right\}\right|$$

dir. Herhangi bir $\delta>0$ için

$$\left\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : \frac{1}{g_1(m)g_1(n)}\left|\left\{(k,l), k\leq m \text{ ve } l\leq n : x_{k,l}-x_0\notin V\right\}\right|\geq\delta\right\}$$

$$\subset\left\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : \frac{1}{g_2(m)g_2(n)}\left|\left\{(k,l), k\leq m \text{ ve } l\leq n : x_{k,l}-x_0\notin V\right\}\right|\geq\delta\right\}$$

elde edilir. Sonuç olarak $x=(x_{k,l})\in S_{g_1,g_1}(I)(\tau)$ olduğundan kapsamanın sağ tarafı I 'nın elemanıdır. Bu ise $S_{g_1,g_1}(I)(\tau)\subset S_{g_2,g_2}(I)(\tau)$ olmasını gerektirir.

Tanım 4.3.10 (X,τ) bir yerel katı Riesz uzayı ve $\theta_{r,s}=\{(k_r,l_s)\}$ bir çift indisli lacunary dizisi olsun. $g(h_{rs})=g(h_r\cdot\bar{h}_s)=g(h_r)g(\bar{h}_s)$ olmak üzere eğer sıfırın her V $\tau-$komşuluğu ve $\delta>0$ için,

$$\left\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : \frac{1}{g(h_r)g(\bar{h}_s)}\left|\left\{(k,l)\in I_{rs} : x_{k,l}-x_0\notin V\right\}\right|\geq\delta\right\}\in I$$

yani

$$\left\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : \frac{1}{g(h_r)g(\bar{h}_s)}\left|\left\{(k,l)\in I_{rs} : x_{k,l}-x_0\notin V\right\}\right|<\delta\right\}\in F(I)$$

olacak şekilde bir $x_0 \in \mathbb{R}$ sayısı varsa $x=(x_{k,l}) \in X$ dizisine $S_{g,g}^{\theta_{rs}}(I)(\tau)-$yakınsaktır denir ve $x_{k,l} \to x_0\left(S_{g,g}^{\theta_{rs}}(I)(\tau)\right)$ veya $(I)(\tau)-\lim x_{k,l}=x_0$ şeklinde gösterilir. Tüm çift indisli lacunary ağırlıklı yakınsak dizilerin uzayı $S_{g,g}^{\theta_{rs}}(I)(\tau)$ ile gösterilecektir.

Tanım 4.3.11 (X,τ) bir yerel katı Riesz uzayı ve $\theta_{r,s}=\{(k_r,l_s)\}$ bir çift indisli lacunary dizisi olsun. $g(h_{rs})=g(h_r \cdot \bar{h}_s)=g(h_r)g(\bar{h}_s)$ olmak üzere eğer sıfırın her V $\tau-$komşuluğu ve $\delta>0$ için,

$$\left\{(m,n)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \frac{1}{g(m)g(n)}\left|\left\{k\leq m \text{ ve } l\leq n : \lambda x_{k,l}\notin V\right\}\right|\geq \delta\right\}\in I$$

olacak şekilde bir $\lambda>0$ sayısı mevcut ise $x=(x_{k,l})\in X$ dizisi $S_{g,g}^{\theta_{rs}}(I)(\tau)-$sınırlıdır denir.

Teorem 4.3.12 (X,τ) bir yerel katı Riesz uzayı ve $\theta_{r,s}=\{(k_r,l_s)\}$ bir çift indisli lacunary dizisi olsun. Eğer $\liminf_{r,s\to\infty}\dfrac{g(h_r)g(\bar{h}_s)}{g(k_r)g(k_s)}>1$ ise $S_{g,g}^{\tau}(I)\subset S_{g,g}^{\theta_{rs}}(I)(\tau)$.

İspat: $\liminf\limits_{r,s\to\infty}\dfrac{g(h_r)g(\bar{h}_s)}{g(k_r)g(l_s)}>1$ olduğundan, yeterince büyük r,s için $\liminf\limits_{r,s\to\infty}\dfrac{g(h_r)g(\bar{h}_s)}{g(k_r)g(l_s)}\geq 1+H$ olacak şekilde bir $H>0$ sayısı bulunabilir. Kabul edelim ki $x_{k,l}\xrightarrow{S_{g,g}(I)(\tau)} x_0$ olsun. Sıfırın her $V,\tau-$komşuluğu için

$$\frac{1}{g(k_r)g(l_s)}\left|\left\{k \le k_r \text{ ve } l \le l_s : x_{k,l} - x_0 \notin V\right\}\right|$$

$$\ge \frac{1}{g(k_r)g(l_s)}\left|\left\{(k,l) \in I_{rs} : x_{k,l} - x_0 \notin V\right\}\right|$$

$$= \frac{g(h_r)g(\overline{h}_s)}{g(k_r)g(l_s)} \frac{1}{g(h_r)g(\overline{h}_s)}\left|\left\{(k,l) \in I_{rs} : x_{k,l} - x_0 \notin V\right\}\right|$$

$$\ge (1+H)\frac{1}{g(h_r)g(\overline{h}_s)}\left|\left\{(k,l) \in I_{rs} : x_{k,l} - x_0 \notin V\right\}\right|$$

yazılabilir. Buradan herhangi bir $\delta > 0$ için

$$\left\{\frac{1}{g(h_r)g(\overline{h}_s)}\left|\left\{(k,l) \in I_{rs} : x_{k,l} - x_0 \notin V\right\}\right| \ge \frac{1}{(1+H)}\delta\right\}$$

$$\subset \left\{\frac{1}{g(k_r)g(l_s)}\left|\left\{k \le k_r \text{ ve } l \le l_s : x_{k,l} - x_0 \notin V\right\}\right| \ge \delta\right\} \in I$$

elde edilir. $x_{k,l} \xrightarrow{S_{g,g}(I)(\tau)} x_0$ olduğundan I ya aittir. Bu ise $S_{g,g}^{\tau}(I) \subset S_{g,g}^{\theta_{rs}}(I)(\tau)$ olmasını gerektirir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, yerel katı Riesz uzaylarında, klasik anlamda yakınsaklıktan daha zayıf bir yakınsaklık çeşidi olan istatistiksel yakınsaklık ve bunun bir genelleştirmesi olan ideal yakınsaklık kavramları derlenerek gerekli literatür taraması yapılmıştır. Toplanabilme teorisindeki ideal tanımı ile cebirdeki Boole halkası yardımıyla tanımlanan ideal tanımının birbirlerine denk olduğu gösterilmiştir. Ayrıca yerel katı Riesz uzaylarında $I-$ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsaklık ile ‘’g’’ ağırlık fonksiyonu yardımıyla elde edilen çift indisli diziler için $I-$istatistiksel yakınsaklık ve $I-$lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramları tanımlandı ve bu kavramlar arasındaki kapsama bağıntıları verilerek bazı topolojik özellikleri incelendi. Yerel katı Riesz uzaylarında elde edilen bu sonuçların ilgili araştırma alanlarına katkıda bulunacağı öngörülmektedir ve bu bağlamda akla şu sorular gelebilir:

i. Elde edilen bu sonuçlar topolojik gruplara taşınabilir mi?

ii. Teorem 4.2.11 $S_{g,g}^{\tau}(I)\subset S_{g,g}^{\theta_{rs}}(I)(\tau)$ kapsama bağıntısı ispat edilmiştir. Fakat hangi şartlar altında $S_{g,g}^{\theta_{rs}}(I)(\tau)\subset S_{g,g}^{\tau}(I)$ kapsamanın sağlanacağı henüz bilinmediğinden

bu iki soru araştırma niteliğinde olup açık uçlu problem olarak bırakılmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Riesz F, 1928. Sur la Décomposition des opérations Fonctionnelles Linéaires. In Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, 3: 143-148.

[2] Aliprantis CD, Burkinshaw O, 2003. Locally Solid Riesz Space with Applications to Economics. American Mathematical Society. 344p.

[3] Kostyrko P, Salat T, Wielczynski W, 2000. $I-$Convergence, Real Anal. Exchange, 26: 669-686.

[4] Fast H, 1951. Sur la Convergence Statistique, Colloquium Mathematicum, 2: 241-244.

[5] Steinhaus H, 1951.Sur la Convergence Ordinarie et la Convergence Asymptotique, Colloq. Math., 2: 73-74.

[6] Schoenberg IJ, 1959. The integrability of Certain Functions and Related Summability Methods, American Mathematical Society, Monthly, 66: 361-375.

[7] Salat T, 1980. On Statistical Convergent Sequences of Real Numbers Mathematica. Slovaca, 30: 139-150.

[8] Freedman AR, Sember JJ, 1981.Densities and Summability", Pasific Journal of Mathematics, 95: 293-305.

[9] Fridy J.A, 1985. On Some Statistical Convergence, Analysis, 5: 301-313.

[10] Connor JS, 1988. The Statistical and Strong p-Cesaro Convergence of Sequences. Analysis, 8: 47–63.

[11] Fridy JA, Orhan C, 1993. Lacunary Statistical Convergence. Pacific Journal of

Mathematics, 160 (1).

[12] Karakaya V, Chisti TA, 2009. Weighted Statistical Convergence. Iranion Journal of Science, 33 (3).

[13] Başarır M, Konca Ş, 2014. On Some Spaces of Lacunary Convergent Sequences Derive by Nörlund- type Mean and Weighted Lacunanry Statistical Convergence, Arab Journal of Mathematical Sciences, 20 (2): 250-263.

[14] Konca Ş, Genç E, Ekin S, 2016. Ideal Version of Weighted Lacunary Statistical Convergence of Order. Journal of Mathematical Analysis, 7 (6).

[15] Di Maio G, Kočinac LDR., 2008. Statistical Convergence in Topology. Topology and its Applications, 156 (1): 28-45.

[16] Freudenthal H, 1936. Teilweise Geordnete Modulen. Proceedings of the Academy of Amsterdam, 39: 641-651.

[17] Kantrovich LV, 1937. Lineare Haldgeordnete Raume. Receueil Mathematique, 2: 121-168.

[18] Albayrak H, Pehlivan S, 2012. Statistical Convergence and Statistical Continuity on Locally Solid Riesz Spaces. Topology and its Applications, 159: 1887-1893.

[19] Mohiuddine SA, Alghamdi MA, Statistical Summability Through a Lacunary Sequence in Locally Solid Riesz Spaces. Journal of Inequalities and Applications, 1: 225.

[20] Pringsheim A, 1900. Zur Theorie der Zweifach Unendlichen Zahlenfolgen, Mathematische Annanlen, 53 (3): 289-321.

[21] Konca Ş, Genç E, 2016. Ideal Version of Weighted Lacunary Statistical Convergence of Double Sequences. The Aligarh Bulletin Of Mathematics, 35 (1-2): 83-97.

[22] Konca Ş. 2016. Weighted Lacunary Statistical Converge of Double Sequences in Locally Solid Riesz Spaces, Filomat, 30 (3): 621-629.

[23] Kostyrko P, Macaj M, Šalát T, Sleziak M, 2005. $I-$Convergence And Extremal $I-$ Limit Pointsi, Mathematica Slovaca, 55 (4): 443-464.

[24] Savaş E, Das P, 2011. A generalized Statistical Convergence via Ideals. Applied. Mathematics Letters, 24: 826-830.

[25] Das P, Savaş E, Ghosal SK, 2011. On Generalizations of Certain Summability Methods Using Ideals, Applied Mathematics Letters, 24 (9): 1509-1514.

[26] Savaş E, Das P, Dutta S, 2012. A Note onStrong Matrix Summability via Ideals, Applied Mathematics Letters, 25 (4): 733-738.

[27] Genç E, Konca Ş, 2018. Ideal Version of Weighted Lacunary Statistical Convergence in Locally Solid Riesz Space. International Conference on Stem and Educational Sciences, 3-5 Mayıs 2018, Muş Alparslan Üniversitesi-Muş, s:219.

[28] Genç E, Konca Ş, 2018. Statistical Convergence of Weight "g" in Locally Solid Riesz Space. International Conference on Stem and Educational Sciences, 3-5 Mayıs 2018, Muş Alparslan Üniversitesi-Muş, s:227.

[29] Das P, Savas E, 2015. On $I-\lambda-$Statistical Convergence in Locally Solid Riesz Spaces. Mathematica Slovaca, 65 (6): 1491-1504.

[30] Kostyrko P, Macaj M, Šalát T, Strauch O, 2011. On Statistical Limit Points Proceedings of the American Mathematical Society, 129 (9): 2647-2654.

[31] Činčura, J, Šalát, T Sleziak, M, Toma V, 2004. Sets of Statistical Cluster Points and $\mathcal{J}$-Cluster Points. Real Analysis Exchange, 30 (2): 565-580.

[32] Kostyrko P, Macaj M, Šalát T, 2000. Statistical Convergence and I-Convergence. The International Mathematical Scientific Conference, 16th Summer School on Real Functions Theory.

[33] Kızmaz H, 1993. Fonksiyonel Analize Giriş, KTÜ Basımevi, Trabzon.

[34] Maddox I.J, 1970. Elements of Functional Analysis, Cambridge Univ. Press.

[35] Bayraktar M, 1992. Fonksiyonel Analiz. Atatürk Üniversitesi Yayınları. Erzurum.

[36] Musayev B, Alp M, Mustafayev N, Ekincioğlu İ, 2007. Analiz-I. Seçkin Yayıncılık San. ve Tic. A.Ş. Ankara.

[37] Başar F, 2011. Summability Theory and Its Applications, Bentham Science Publishers, Istanbul, s.15-17.

[38] Hardy GH, 1949. Divergent Series, Oxford Univ. Press, London.

[39] Çallıalp F, 2001. Örneklerle Soyut Cebir. Birsen Yayınevi. İstanbul.

[40] Givant S, Halmos P, 2009. 14-20, in: Introduction to Boolean Algebras Springer, Press, USA.

[41] Demirci K, 1998. İstatistiksel Yakınsaklık. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

[42] Demirci K, 1998. A-İstatistiksel Yakınsaklık ve Çarpan Uzayları. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bili9mleri Enstitüsü, Ankara.

[43] Mursaleen M, Karakaya V, Ertürk M, Gürsoy F, 2012. Weighted Statistical Convergence and its Application to Korovkin Type Approximation Theorem. Applied Mathematics and Computation, 218 (18): 9132-9137.

[44] Tripathy B, Tripathy BC, 2005. On $I-$convergent double sequences. Soochow Journal of Mathematics, 31 (4): 549.

[45] Balcerzak M, Das P, Filipczak M, 2015. Generalized Kinds of Density and the Associated Ideals. Acta Mathematica Hungarica, Swaczyna, 147 (1): 97-115.

[46] Rahimov A, 2006. Topolojik Uzaylar. Seçkin Yayıncılık San. ve Tic. A.Ş. Ankara.

[47] Albayrak H, 2014. Yerel Katı Riesz Uzaylarında İstatistiksel Süreklilik ve Bazı Yakınsaklık Tipleri. Doktora Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitütsü, Isparta.

[48] Başarır M, Konca Ş, 2014. Weighted lacunary statistical convergence in locally solid Riesz spaces. Filomat, 28 (10): 2059-2067.

[49] Mohiuddine SA, Alotaibi A, Mursaleen M, 2012. Statistical convergence of double sequences in locally solid Riesz spaces. In Abstract and Applied Analysis, Hindawi.

[50] Hazarika B, 2014. Ideal convergence in locally solid Riesz spaces. Filomat, 28 (4): 797-809.

[51] Balcı M, 1997. Analiz-1. Ertem Basın Yayın Dağıtımı Ltd. Şti. Ankara.

ÖZGEÇMİŞ

28 Mayıs 1993 yılında Hekimhan'da doğdu. İlköğretimini ve ortaöğretimini Atatürk İlköğretim Okulu'nda ve liseyi Hekimhan Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2011 yılında kazandığı Bitlis Eren Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde 2015 yılının Haziran ayında mezun oldu. Aynı yılın Ağustos ayında Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün Matematik Anabilim dalında açmış olduğu tezli yüksek lisans programına başladı.

Ergin GENÇ