BEÜ Fen Bilimleri Dergisi
10 (4), 1416-1425, 2021
DOI: 10.17798/bitlisfen.959454

BEU Journal of Science
10 (4), 1416-1425, 2021

Araştırma Makalesi / Research Article

$\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$-Katsayılı Sedeniyonların Özel Matris Gösterimleri ve Bazı Özellikleri

Özcan BEKTAŞ*

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
(ORCID: 0000-0002-2483-1939)

Öz
Bu makalede ilk olarak sedeniyonlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. Daha sonra sedeniyonların kompleks ($\mathbb{C}$), kuaterniyon ($\mathbb{H}$) ve oktoniyon ($\mathbb{O}$) katsayılı gösterimlerinden yararlanılarak farklı türden eşlenikleri tanımlanıp, bazı özellikleri verilecektir. Son olarak da sedeniyonların $\mathbb{C}$,$\mathbb{H}$,$\mathbb{O}$-katsayılı özel matris gösterimleri sunulacaktır.

Anahtar kelimeler: Eşlenik, Kuaterniyonlar, Kompleks sayılar, Oktoniyonlar, Sedeniyonlar.

Some Properties and Special Matrix Representations of $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$- Coefficient Sedenion Numbers

Abstract
In this article, firstly, the basic concepts about the sedenions are given. Then, using the representations of the sedenions with complex ($\mathbb{C}$), quaternion ($\mathbb{H}$) and octonion (O) coefficients, different types of conjugates will be defined and some properties will be given. Finally, $\mathbb{C}$, H, $\mathbb{O}$ -coefficient special matrix representations of sedenions will be presented.

Keywords: Conjugate, Quaternions, Complex numbers, Octonions, Sedenions.

1. Giriş

Kompleks sayı ($\mathbb{C}$), kuaterniyon ($\mathbb{H}$), oktoniyon ($\mathbb{O}$) ve sedeniyon($\mathbb{S}$) sayı sistemleri son yıllarda teorik ve uygulamalı matematikçilerin ve teorik fizikçilerin oldukça ilgisini çeken konulardır. Cayley-Dickson cebirleri, kompleks sayı ($\mathbb{C}$), kuaterniyon ($\mathbb{H}$), oktoniyon ($\mathbb{O}$) ve sedeniyon($\mathbb{S}$) gibi reel sayılardan elde edilen cebirlerdir. [13,14,16]. Burada bahsedilen bir süreçtir ve bu süreç Cayley-Dickson süreci olarak tanımlanmıştır, [13]. Dikkat edilirse bu süreç aşağıdaki gibi bir zincirlemeye sahiptir.:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{O} \subset \mathbb{S} \subset \cdots$$

[16]. Bu bakımdan değerlendirildiğinde, sedeniyon sayı sistemi bu sayı sistemlerinin hepsini içermesinden dolayı ayrıca bir öneme sahiptir. Fakat literatüre bakıldığında sedeniyonlar ile ilgili çok çalışma bulunmamaktadır.

Kompleks sayı sistemi hem değişmelidir hem de birleşimlidir. Kuaterniyonlar ise değişmeli olmamasına rağmen birleşimlidir. Oktoniyonlar ise hem değişimli hem de birleşimli değildir, fakat alternatiftir (alternative), esnek(flexible) ve üstel birleşimlidir (power-associative) [13-15]. Sedeniyonlar ise hem değişimli, hem birleşimli hem de alternatif değildir. Bu bakımdan, sedeniyonlar diğer sayı sistemlerine kıyasla daha az özelliğe sahiptir.

*Sorumlu yazar: *ozcan.bektas@erdogan.edu.tr*
Geliş Tarihi: 29.06.2021, Kabul Tarihi: 28.11.2021

Bir Z sedeniyon sayısı $Z = x_0 + \sum_{i=1}^{15} e_i x_i,\ x_i \epsilon \mathbb{R}$ şeklinde yazılabilir, [3,5]. Burada e_i'ler sedeniyonların baz elemanları olarak adlandırılır. Z sedeniyonunun eşleniği, mutlak değeri ve tersi sırasıyla $\overline{Z} = x_0 - \sum_{i=1}^{15} e_i x_i$, $|Z| = \sqrt{\sum_{0=1}^{15} {x_i}^2}$ ve $Z^{-1} = \frac{\overline{Z}}{|Z|^2}$, $|Z| \neq 0$, [1,2,3].

Sedeniyonlar, $\mathbb{R}$ üzerinde, 16 boyutlu, değişmeli ve birleşmeli olmayan bir cisimdir [1]. Sedeniyonların değişmeli olmayan e_l $(0 \leq l \leq 15)$ baz elemanlarının çarpımları

$${e_i}^2 = -1, e_i e_j = -e_j e_i, e_i e_j e_k = e_i\left(e_i e_j\right)(i \neq j \neq k, i \neq 0, j \neq 0, k \neq 0)$$

özelliklerini sağlamaktadır , [1,2]. Diğer taraftan verilen bu özellik bir tablo olarak verilebilir, [1].

Tablo 1. Sedeniyon Baz Elemanlarının Çarpımı

$\times$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	e_7	$-e_6$	e_9	$-e_8$	e_{11}	$-e_{10}$	e_{13}	$-e_{12}$	e_{15}	$-e_{14}$
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	$-e_7$	$-e_4$	e_5	e_{10}	$-e_{11}$	$-e_8$	e_9	e_{14}	$-e_{15}$	$-e_{12}$	e_{13}
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	e_6	$-e_5$	$-e_4$	e_{11}	e_{10}	$-e_9$	$-e_8$	e_{15}	e_{14}	$-e_{13}$	$-e_{12}$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	$-e_8$	$-e_9$	$-e_{10}$	$-e_{11}$
e_5	e_5	e_4	e_7	$-e_6$	$-e_1$	-1	e_3	$-e_2$	e_{13}	$-e_{12}$	e_{15}	$-e_{14}$	e_9	$-e_8$	e_{11}	$-e_{10}$
e_6	e_6	$-e_7$	e_4	e_5	$-e_2$	$-e_3$	-1	e_1	e_{14}	$-e_{15}$	$-e_{12}$	e_{13}	e_{10}	$-e_{11}$	$-e_8$	e_9
e_7	e_7	e_6	$-e_5$	e_4	$-e_3$	e_2	$-e_1$	-1	e_{15}	e_{14}	$-e_{13}$	$-e_{12}$	e_{11}	e_{10}	$-e_9$	$-e_8$
e_8	e_8	$-e_9$	$-e_{10}$	$-e_{11}$	$-e_{12}$	$-e_{13}$	$-e_{14}$	$-e_{15}$	-1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_9	e_9	e_8	e_{11}	$-e_{10}$	$-e_{13}$	e_{12}	e_{15}	$-e_{14}$	$-e_1$	-1	e_3	$-e_2$	$-e_5$	e_4	e_7	$-e_6$
e_{10}	e_{10}	$-e_{11}$	e_8	e_9	$-e_{14}$	$-e_{15}$	e_{12}	e_{13}	$-e_2$	$-e_3$	-1	e_1	$-e_6$	$-e_7$	e_4	e_5
e_{11}	e_{11}	e_{10}	$-e_9$	e_8	$-e_{15}$	e_{14}	$-e_{13}$	e_{12}	$-e_3$	e_2	$-e_1$	-1	$-e_7$	e_6	$-e_5$	e_4
e_{12}	e_{12}	$-e_{13}$	$-e_{14}$	$-e_{15}$	e_8	$-e_9$	$-e_{10}$	$-e_{11}$	$-e_4$	e_5	e_6	e_7	-1	e_1	e_2	e_3
e_{13}	e_{13}	e_{12}	e_{15}	$-e_{14}$	e_9	e_8	e_{11}	$-e_{10}$	$-e_5$	$-e_4$	e_7	$-e_6$	$-e_1$	-1	e_3	$-e_2$
e_{14}	e_{14}	$-e_{15}$	e_{12}	e_{13}	e_{10}	$-e_{11}$	e_8	e_9	$-e_6$	$-e_7$	$-e_4$	e_5	$-e_2$	$-e_3$	-1	e_1
e_{15}	e_{15}	e_{14}	$-e_{13}$	e_{12}	e_{11}	e_{10}	$-e_9$	e_8	$-e_7$	e_6	$-e_5$	$-e_4$	$-e_3$	$-e_2$	$-e_1$	-1

Bir Z sedeniyonu, $z_1 = x_0 + e_1 x_1$, $z_2 = x_2 + e_1 x_3, z_3 = x_4 + e_1 x_5, z_4 = x_6 + e_1 x_7$, $z_5 = x_8 + e_1 x_9$, $z_6 = x_{10} + e_1 x_{11}$, $z_7 = x_{12} + e_1 x_{13}$, $z_8 = x_{14} + e_1 x_{15} \epsilon \mathbb{C}$ kompleks sayılar olmak üzere
$Z = z_1 + z_2 e_2 + z_3 e_4 + z_4 e_6 + z_5 e_8 + z_6 e_{10} + z_7 e_{12} + z_8 e_{14}$
şeklinde yazılabilir [1]. Böylece $\mathbb{C}^8$ ile $\mathbb{S}$ birbirine eş tutulmuş olur [1]. $Z = z_1 + z_2 e_2 + z_3 e_4 + z_4 e_6 + z_5 e_8 + z_6 e_{10} + z_7 e_{12} + z_8 e_{14}$ ve $W = w_1 + w_2 e_2 + w_3 e_4 + w_4 e_6 + w_5 e_8 + w_6 e_{10} + w_7 e_{12} + w_8 e_{14}$ sedeniyonlarının toplamı

$$Z + W = \sum_{i=1}^{8} (z_i + w_i) e_{2i-2}$$

şeklindedir.

Diğer taraftan, $Q_1 = x_0 + \sum_{i=1}^{3} e_i x_i$, $Q_2 = x_4 + \sum_{i=5}^{7} e_{i-4} x_i$, $Q_3 = x_8 + \sum_{i=8}^{10} e_{i-7} x_i$, $Q_4 = x_{12} + \sum_{i=11}^{13} e_{i-10} x_i \ \epsilon \ \mathbb{H}$ olmak üzere
$Z = Q_1 + Q_2 e_4 + Q_3 e_8 + Q_4 e_{12}$
ifadesi de verilebilir. $Z = Q_1 + Q_2 e_4 + Q_3 e_8 + Q_4 e_{12}$ ve $W = H_1 + H_2 e_4 + H_3 e_8 + H_4 e_{12}$ sedeniyonlarının toplamı

$$Z + W = \sum_{i=1}^{4} (Q_i + H_i) e_{4i-4}$$

şeklindedir.

Son olarak Z sedeniyonu
$O_1 = x_0 + \sum_{i=1}^{7} e_i x_i$, $O_2 = x_8 + \sum_{i=9}^{15} e_{i-8} x_i \epsilon\ \mathbb{O}$ olmak üzere
$Z = O_1 + O_2 e_8$
şeklinde de yazılabilir, [2]. $Re(O_1) = x_0$ ve $Im(O_1) = \sum_{i=1}^{7} e_i x_i$ ile tanımlıdır.

Burada herhangi iki $Z_1 = O_1 + O_2 e_8$ ve $Z_2 = O_3 + O_4 e_8$ sedeniyonlarının toplamı ve çarpımı

$$Z_1 + Z_2 = (O_1 + O_3) + (O_2 + O_4)e_8$$

ve

$$Z_1 Z_2 = \left(O_1 O_3 - \overline{O_4} O_2\right) + \left(O_2 \overline{O_3} + O_4 O_1\right)e_8$$

şeklindedir. Ayrıca $O_1 = x_0 + \sum_{i=1}^{7} e_i x_i$ oktoniyonu için

$$O_1 + \overline{O_1} = 2x_0 = 2Re(O_1)$$

ve

$$O_1 - \overline{O_1} = 2\sum_{i=1}^{7} e_i x_i = 2Im(O_1)$$

elde edilir.

Farklı türden sayı sistemleri tanımları göz önüne alınarak farklı eşlenik tanımları Messelmi tarafından verilmiştir [4]. Kompleks ve dual eşlenikler $\mathbb{C}$ (kompleks sayılar) ve D (dual sayılar) sistemlerinin cebirsel ve geometrik özellikleri bakımından oldukça önemlidir, [4].

Aşağıda farklı türden eşlenik tanımları verilecektir:
$\varepsilon = (1,0)$ dual birim, $z = a_1 + a_2 i \epsilon \mathbb{C}$, $t = b_1 + b_2 i \epsilon \mathbb{C}$ kompleks sayılar ve $\bar{z} = a_1 - a_2 i \epsilon \mathbb{C}$, $\bar{t} = b_1 - b_2 i \epsilon \mathbb{C}$ kompleks sayıları da bilinen eşlenikler olmak üzere, $w = z + t\varepsilon$ dual-kompleks sayının kompleks eşleniği, sadece kompleks sayıların eşlenikleri kullanarak

$$\overline{w}^1 = \bar{z} + \bar{t}\varepsilon$$

şeklinde tanımlanır [4]. Burada ifade açılırsa, $\overline{w}^1 = a_1 - a_2 i + b_1\varepsilon - b_2 i\varepsilon$ dual-kompleks sayısı elde edilir.

$w = z + t\varepsilon$ dual-kompleks sayının dual eşleniği, sayıya dual sayı gözüyle bakılıp, dual eşlenik kullanarak

$$\overline{w}^1 = z - t\varepsilon$$

şeklinde tanımlanır [4]. Burada ifade açılırsa, $\overline{w}^1 = a_1 + a_2 i - b_1\varepsilon - b_2 i\varepsilon$ dual-kompleks sayısı elde edilir.

$w = z + t\varepsilon$ dual-kompleks sayının ikili eşleniği, hem kompleks sayıların eşleniği hem de dual eşlenik kullanarak

$$\overline{w}^1 = \bar{z} - \bar{t}\varepsilon$$

şeklinde tanımlanır [4]. Burada ifade açılırsa, $\overline{w}^1 = a_1 - a_2 i - b_1\varepsilon + b_2 i\varepsilon$ elde edilir.

$w = z + t\varepsilon$ dual-kompleks sayının anti-dual eşleniği, kompleks sayıların yerleri değiştirilip dual eşlenik kullanarak

$$\overline{w}^1 = t - z\varepsilon$$

şeklinde tanımlanır, [4]. Burada ifade açılırsa, $\overline{w}^1 = b_1 + b_2 i - a_1\varepsilon - a_2 i\varepsilon$ dual-kompleks sayısı elde edilir.

Genel olarak, kompleks, kuaterniyon ve oktoniyonlar için Re ve Im kavramları, sırasıyla, reel ve imajiner kısımlar olarak ifade edilir.

Sedeniyonlar son yıllarda özellikle cebirsel özelliklerinin araştırılması bakımından göze çarpmaktadır [10-12]. Örneğin Perrin sedeniyonlar ve Tribonacci sedeniyonlar, sırasıyla [6,7] tarafından verilen çalışmalarla incelenmiştir. Ayrıca k-pell sedeniyonlar çalışılmıştır [8]. Yine literatürde önemli bir yere sahip olan Fibonacci sedeniyonları [9] tarafından verilmiştir.

Bu çalışmada, sedeniyonların kompleks, kuaterniyon ve oktoniyon katsayılı gösterimlerinden yararlanarak bu yazılışlar için yukarıda tanımları verilen kompleks, dual, ikili ve anti-dual eşlenik tanımlarına benzer olarak 1. ve 2. tip kompleks, kuaterniyon ve oktoniyon eşlenik, ikili kompleks, ikili kuaterniyon ve ikili oktoniyon eşlenikler, 1. ve 2. tip kompleks, kuaterniyon ve oktoniyon normal eşlenikler ve anti-oktoniyon eşlenik tanımlanacaktır. Ayrıca sedeniyonların kompleks, kuaterniyon ve oktoniyon katsayılı matris gösterimleri de elde edilecektir.

2. $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$- Katsayılı Sedeniyonların Tanımı ve Özellikleri

Bu bölüm çalışmanın orijinal bölümüdür. Burada, $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$-katsayılı sedeniyonlar için eşlenik, toplama ve çarpma gibi temel işlemler, Messeli'nin [4] kaynağında yaptığı tanımlamalara benzer olarak tanımlanacaktır. Ayrıca $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$-katsayılı sedeniyonlar için bazı özellikler verilecektir.

İlk olarak, cebirsel ve geometrik olarak önemli bir işlem olan eşlenik kavramını $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$-katsayılı sedeniyonların her biri için 6 farklı şekilde aşağıdaki gibi tanımlayalım:

Tanım 2.1 $z_1 = x_0 + e_1x_1$, $z_2 = x_2 + e_1x_3, z_3 = x_4 + e_1x_5, z_4 = x_6 + e_1x_7$, $z_5 = x_8 + e_1x_9$, $z_6 = x_{10} + e_1x_{11}$, $z_7 = x_{12} + e_1x_{13}$, $z_8 = x_{14} + e_1x_{15} \in \mathbb{C}$ kompleks sayılar, $Q_1 = x_0 + \sum_{i=1}^{3} e_ix_i$, $Q_2 = x_4 + \sum_{i=5}^{7} e_{i-4}x_i$, $Q_3 = x_8 + \sum_{i=8}^{10} e_{i-7}x_i$, $Q_4 = x_{12} + \sum_{i=11}^{13} e_{i-10}x_i \in \mathbb{H}$ kuaterniyonlar ve $O_1 = x_0 + \sum_{i=1}^{7} e_ix_i$, $O_2 = x_8 + \sum_{i=9}^{15} e_{i-8}x_i \in \mathbb{O}$ oktoniyonlar olmak üzere, $Z = z_1 + z_2e_2 + z_3e_4 + z_4e_6 + z_5e_8 + z_6e_{10} + z_7e_{12} + z_8e_{14} = Q_1 + Q_2e_4 + Q_3e_8 + Q_4e_{12} = O_1 + O_2e_8$ sedeniyonu verilsin.

1) $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$-katsayılı sedeniyonların 1. tip kompleks, kuaterniyon ve oktoniyon eşlenikleri, sırasıyla,

$\overline{Z}^1 = \overline{z_1} + \overline{z_2}e_2 + \overline{z_3}e_4 + \overline{z_4}e_6 + \overline{z_5}e_8 + \overline{z_6}e_{10} + \overline{z_7}e_{12} + \overline{z_8}e_{14}, \overline{z_1} = x_0 - e_1x_1, \ldots, \overline{z_8} = x_{14} - e_1x_{15}$

$\overline{Z}^1 = \overline{Q_1} + \overline{Q_2}e_4 + \overline{Q_3}e_8 + \overline{Q_4}e_{12}$, $\overline{Q_1} = x_0 - \sum_{i=1}^{3} e_ix_i, , , \overline{Q_4} = x_{12} - \sum_{i=11}^{13} e_{i-10}x_i$

$\overline{Z}^1 = \overline{O_1} + \overline{O_2}e_8$, $\overline{O_1} = x_0 - \sum_{i=1}^{7} e_ix_i$, $\overline{O_2} = x_8 - \sum_{i=9}^{15} e_{i-8}x_i \in \mathbb{O}$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$-katsayılı sedeniyonların, sırasıyla kompleks, kuaterniyon ve oktoniyon eşlenikleri bulunurken ayrı ayrı bilinen eşlenik tanımları kullanılmıştır.

2) $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$-katsayılı sedeniyonların 2. tip kompleks, kuaterniyon ve oktoniyon eşlenikleri, sırasıyla,

$\overline{Z}^2 = z_1 - z_2e_2 - z_3e_4 - z_4e_6 - z_5e_8 - z_6e_{10} - z_7e_{12} - z_8e_{14}$,

$\overline{Z}^2 = Q_1 - Q_2e_4 - Q_3e_8 - Q_4e_{12}$,

$\overline{Z}^2 = O_1 - O_2e_8$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$-katsayılı sedeniyonların, sırasıyla kompleks, kuaterniyon ve oktoniyon eşlenikleri bulunurken, kompleks sayı, kuaterniyon ve oktoniyonun ayrı ayrı eşlenik tanımları kullanılmamıştır, sadece kompleks, kuaterniyon ve oktoniyon birimlerin önüne (-) gelmiştir.

3) $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$-katsayılı sedeniyonların ikili kompleks, ikili kuaterniyon ve ikili oktoniyon eşlenikleri, sırasıyla,

$\overline{Z}^3 = \overline{z_1} - \overline{z_2}e_2 - \overline{z_3}e_4 - \overline{z_4}e_6 - \overline{z_5}e_8 - \overline{z_6}e_{10} - \overline{z_7}e_{12} - \overline{z_8}e_{14}$,

$\overline{Z}^3 = \overline{Q_1} - \overline{Q_2}e_4 - \overline{Q_3}e_8 - \overline{Q_4}e_{12}$,

$\overline{Z}^3 = \overline{O_1} - \overline{O_2}e_8$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$-katsayılı sedeniyonların, sırasıyla kompleks, kuaterniyon ve oktoniyon eşlenikleri bulunurken hem kompleks sayı, kuaterniyon ve oktoniyonun ayrı ayrı eşlenik tanımları kullanılmış hem de kompleks, kuaterniyon ve oktoniyon birimlerin önüne (-) gelmiştir.

4) $\mathbb{C},\mathbb{H},\mathbb{O}$-katsayılı sedeniyonların 1. tip kompleks, kuaterniyon ve oktoniyon normal eşlenikleri, sırasıyla,

$\overline{Z}^4 = \overline{z_1} - z_2e_2 - z_3e_4 - z_4e_6 - z_5e_8 - z_6e_{10} - z_7e_{12} - z_8e_{14}$,
$\overline{Z}^4 = \overline{Q_1} - Q_2e_4 - Q_3e_8 - Q_4e_{12}$,
$\overline{Z}^4 = \overline{O_1} - O_2e_8$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mathbb{C},\mathbb{H},\mathbb{O}$-katsayılı sedeniyonların, sırasıyla kompleks, kuaterniyon ve oktoniyon eşlenikleri bulunurken hem ilk kısımdaki (reel kısımdaki) kompleks sayı, kuaterniyon ve oktoniyonun eşlenik tanımları kullanılmış ve hem de ikinci kısımdaki (vektör kısımda) kompleks, kuaterniyon ve oktoniyon birimlerin önüne (-) gelmiştir.

5) $\mathbb{C},\mathbb{H},\mathbb{O}$-katsayılı sedeniyonların 2. tip kompleks, kuaterniyon ve oktoniyon normal eşlenikleri, sırasıyla,

$\overline{Z}^5 = z_1 - \overline{z_2}e_2 - \overline{z_3}e_4 - \overline{z_4}e_6 - \overline{z_5}e_8 - \overline{z_6}e_{10} - \overline{z_7}e_{12} - \overline{z_8}e_{14}$,
$\overline{Z}^3 = Q_1 - \overline{Q_2}e_4 - \overline{Q_3}e_8 - \overline{Q_4}e_{12}$,
$\overline{Z}^5 = O_1 - \overline{O_2}e_8$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mathbb{C},\mathbb{H},\mathbb{O}$-katsayılı sedeniyonların, sırasıyla kompleks, kuaterniyon ve oktoniyon eşlenikleri bulunurken ilk kısımdaki (reel kısımdaki) kompleks sayı, kuaterniyon ve oktoniyonun eşlenik tanımları kullanılmamıştır fakat ikinci kısımdaki (vektör kısımda) kompleks, kuaterniyon ve oktoniyonların ayrı ayrı eşlenikleri alınmıştır.

6) $\mathbb{O}$-katsayılı sedeniyonların anti-oktoniyon eşleniği

$\overline{Z}^6 = O_2 - O_1e_8$.

şeklinde tanımlanır. Burada, eşlenik tanımlanırken, $Z = O_1 + O_2e_8$, sedeniyonunda O_1 ve O_2 oktoniyonlarının sıralaması değiştirilip $W = O_2 + O_1e_8$ yeni bir sedeniyon elde edilmiştir. Daha sonra tıpkı bir karmaşık sayının eşleniği alınır gibi eşlenik alınmıştır. Yani, $\overline{Z}^6 = \overline{W} = O_2 - O_1e_8$ şeklindedir.

Tanım 2.1 kullanılarak $\mathbb{C},\mathbb{H},\mathbb{O}$-katsayılı sedeniyonların modül ve eşlenikleriyle ilgili aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 2.1 $Z = O_1 + O_2e_8 \in \mathbb{S}$ bir sedeniyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:

1) $Z + \overline{Z}^1 = 2Re(O_1) + 2Re(O_2)e_8$,
2) $Z\overline{Z}^1$=$(|O_1|^2 - (O_2)^2) + \left(O_2O_1 + \overline{O_2}O_1\right)e_8$,
3) $Z + \overline{Z}^2 = 2O_1$,
4) $Z\overline{Z}^2$=$\left(O_1{}^2 + |O_2|^2\right) + \left(O_2\overline{O_1} - O_2O_1\right)e_8$,
5) $Z + \overline{Z}^3 = 2Re(O_1) + 2Im(O_2)e_8$,
6) $Z\overline{Z}^3$=$(|O_1|^2 + (O_2)^2) + \left(O_2O_1 - \overline{O_2}O_1\right)e_8$,
7) $Z + \overline{Z}^4 = 2Re(O_1)$
8) $Z\overline{Z}^4$=$(|O_1|^2 + |O_2|^2)$,
9) $Z + \overline{Z}^5 = 2O_1 + 2Im(O_2)e_8$,
10) $Z\overline{Z}^5$=$\left(O_1{}^2 + O_2{}^2\right) + \left(O_2\overline{O_1} - \overline{O_2}O_1\right)e_8$,
11) $Z + \overline{Z}^6 = (O_1 + O_2) + (O_2 - O_1)e_8$,
12) $Z\overline{Z}^6$=$\left(O_1O_2 + \overline{O_1}O_2\right) + \left(|O_2|^2 - O_1{}^2\right)e_8$.

İspat:

1)
$$\begin{aligned} Z + \overline{Z}^1 &= (O_1 + O_2e_8) + \left(\overline{O_1} + \overline{O_2}e_8\right) \\ &= \left(O_1 + \overline{O_1}\right) + \left(O_2 + \overline{O_2}\right)e_8 \\ &= 2Re(O_1) + 2Re(O_2)e_8 \end{aligned}$$

elde edilir.

2) $Z\overline{Z}^{1} = (O_1 + O_2 e_8) + (\overline{O_1} + \overline{O_2} e_8)$
$= \left(O_1\overline{O_1} - \overline{\overline{O_2}}O_2\right) + \left(O_2\overline{\overline{O_1}} + \overline{O_2}O_1\right)e_8$
$= (|O_1|^2 - (O_2)^2) + \left(O_2 O_1 + \overline{O_2}O_1\right)e_8$

elde edilir.

Diğer ifadelerin ispatları Tanım 2.1'deki ilgili eşlenik ve oktoniyon katsayılı sedeniyonların toplamı ve çarpımı kullanılırsa elde edilir.

Not 2.1 Bu önerme sedeniyonların kompleks katsayılı

$Z = z_1 + z_2 e_2 + z_3 e_4 + z_4 e_6 + z_5 e_8 + z_6 e_{10} + z_7 e_{12} + z_8 e_{14}$

ve sedeniyonların kuaterniyon katsayılı

$Z = Q_1 + Q_2 e_4 Q_3 e_8 + Q_4 e_{12}$

gösterimleri için Tanım 2.1'deki ilgili eşlenik ve oktoniyon katsayılı sedeniyonların toplamı ve çarpımı kullanılarak benzer şekilde verilebilir.

Teorem 2.1 $O, P \in \mathbb{O}$, $Q \in \mathbb{H}$, $z \in \mathbb{C}$ ve $e_8 \in \mathbb{S}$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır:

1) $(Oe_8)e_8 = O(e_8e_8) = -O,\ e_8(e_8O) = (e_8e_8)\,O = -O,$
2) $Oe_8 = e_8\overline{O},\ \ e_8(Oe_8) = e_8\left(e_8\overline{O}\right) = -\overline{O},$
3) $(OP)e_8 = (PO)e_8,$
4) $(Oe_4)P = \left(O\overline{P}\right)e_8,$
5) $(Oe_8)(Pe_8) = \overline{P}O,$
6) $e_iQ = \bar{Q}e_i,\ 1 \leq i \leq 15,$
7) $Qe_i = e_i\bar{Q},\ 1 \leq i \leq 15,$
8) $e_i(Qe_i) = e_i(e_i\bar{Q}) = -\bar{Q},\ 1 \leq i \leq 15,$
9) $e_i\left(Qe_j\right) = e_i\left(e_j\bar{Q}\right) = \left(e_ie_j\right)\bar{Q} =,\ 1 \leq i,j \leq 15,$
10) $e_i(ze_i) = e_i(e_i\bar{z}) = -\bar{z},\ 1 \leq i \leq 15,$
11) $e_i\left(ze_j\right) = e_i\left(e_j\bar{z}\right) = \left(e_ie_j\right)\bar{z} =,\ 1 \leq i,j \leq 15.$

İspat:

$O = x_0 + \sum_{i=1}^{7} e_i x_i \in \mathbb{O},\ P = y_0 + \sum_{i=1}^{7} e_i y_i \in \mathbb{O},\ Q_1 = q_0 + \sum_{i=1}^{3} e_i q_i \in \mathbb{H},\ z_1 = p_0 + e_1 p_1 \in \mathbb{C},$ $e_8 \in \mathbb{S}$ sayıları verilsin.

1) $(Oe_8)e_8 = \left((x_0 + \sum_{i=1}^{7} e_i x_i)\, e_8\right)e_8$
$= (x_0e_8 + x_1e_9 + x_2e_{10} + x_3e_{11} + x_4e_{12} + x_5e_{13} + x_6e_{14} + x_7e_{15})e_8$
$= -x_0 - \sum_{i=1}^{7} e_i x_i$
$= -O$

ve

$O(e_8e_8) = O(-1) = -O$

olduğundan $(Oe_8)e_8 = O(e_8e_8) = -O$ elde edilir. Benzer şekilde,

$$e_8(e_8O) = e_8\left(e_8(x_0 + \sum_{i=1}^{7} e_i x_i)\right)$$

$$= e_8(x_0e_8 - x_1e_9 - x_2e_{10} - x_3e_{11} - x_4e_{12} - x_5e_{13} - x_6e_{14} - x_7e_{15}) = -x_0 - \sum_{i=1}^{7} e_ix_i = -O$$

ve

$(e_8e_8)\ O = (-1)O = -O$

olduğundan $e_8(e_8O) = (e_8e_8)\ O = -O$ elde edilir.
Diğer ifadeler de benzer şekilde işlemler yapılarak ispat edilebilir.

Önerme 2.2 $Z, Z_1, Z_2 \in \mathbb{S}$ sedeniyonları verilsin. Bu durumda

1) $\overline{\overline{Z}^{1}}^{1} = \overline{\overline{O_1} + \overline{O_2}e_8}^{1} = \overline{\overline{O_1}} + \overline{\overline{O_2}}e_8 = O_1 + O_2e_8 =$ Z,
2) $\overline{\overline{Z}^{2}}^{2} = \overline{O_1 - O_2e_8}^{2} = O_1 + O_2e_8 =$ Z,
3) $\overline{\overline{Z}^{3}}^{3} = \overline{\overline{O_1} - \overline{O_2}e_8}^{3} = \overline{\overline{O_1}} + \overline{\overline{O_2}}e_8 = O_1 + O_2e_8 =$ Z,
4) $\overline{\overline{Z}^{4}}^{4} = \overline{\overline{O_1} - O_2e_8}^{4} = \overline{\overline{O_1}} + O_2e_8 = O_1 + O_2e_8 =$ Z,
5) $\overline{\overline{Z}^{5}}^{5} = \overline{O_1 - \overline{O_2}e_8}^{5} = O_1 + \overline{\overline{O_2}}e_8 = O_1 + O_2e_8 =$ Z,
6) İlk 5 ifade kısaca, $\overline{\overline{Z}^{i}}^{i} =$ Z, $1 \le i \le 5$ şeklinde verilebilir,
7) $\overline{\overline{Z}^{6}}^{6} = \overline{O_2 - O_1e_8}^{6} = -O_1 - O_2e_8 = -$Z,
8) $\overline{Z_1 + Z_2}^{i} = \overline{Z_1}^{i} + \overline{Z_2}^{i}, 1 \le i \le 6,$
9) Genel olarak

$$\begin{aligned}
\overline{Z_1Z_2}^{1} &= \overline{(O_1 + O_2e_8)(O_3 + O_4e_8)}^{1} \\
&= \overline{\left(O_1O_3 - \overline{O_4}O_2\right) + \left(O_2\overline{O_3} + O_4O_1\right)e_8}^{1} \\
&= \overline{O_1O_3 - \overline{O_4}O_2} + \left(\overline{O_2\overline{O_3} + O_4O_1}\right)e_8 \\
&= \overline{O_1O_3} - \overline{\overline{O_4}O_2} + \left(\overline{O_2\overline{O_3}} + \overline{O_4O_1}\right)e_8 \\
&= \overline{O_3}\,\overline{O_1} - \overline{O_2}\,\overline{\overline{O_4}} + \left(\overline{\overline{O_3}}\,\overline{O_2} + \overline{O_1}\,\overline{O_4}\right)e_8 \\
&= \overline{O_3}\,\overline{O_1} - \overline{O_2}O_4 + (O_3\overline{O_2} + \overline{O_1}\,\overline{O_4})e_8
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\overline{Z_2}^{1}\,\overline{Z_1}^{1} &= \overline{(O_3 + O_4e_8)}^{1}\,\overline{(O_1 + O_2e_8)}^{1} \\
&= \left(\overline{O_3} + \overline{O_4}e_8\right) + \left(\overline{O_1} + \overline{O_2}e_8\right) \\
&= \overline{O_3}\,\overline{O_1} - O_2\overline{O_4} + \left(\overline{O_4}O_1 + \overline{O_2}\,\overline{O_3}\right)e_8
\end{aligned}$$

olduğundan $\overline{Z_1Z_2}^{i} \neq \overline{Z_2}^{i}\,\overline{Z_1}^{i}$, $1 \le i \le 5$ şeklindedir.

3. $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$-Katsayılı Sedeniyonların Matris Gösterimleri

Bu bölümde önceki bölümlerde verilen tanım, teorem ve önermeler ile birlikte verilen özellikler kullanılarak kompleks, kuaterniyon ve oktoniyon katsayılı yazılan sedeniyonların özel matris gösterimleri incelenecektir. Sedeniyonların birleşme özelliği olmamasından dolayı matris gösterimi olacak şekilde lineer dönüşüm tanımlanamaz. Fakat Teorem 2.1 ile verilen çarpım özellikleri kullanılarak üç başlık halinde sedeniyonların bazı özel matris gösterimleri verilecektir.

3.1 $\mathbb{O}$- Katsayılı Sedeniyonların Matris Gösterimleri

Tanım 3.1 $Z = O_1 + O_2 e_8 \ \epsilon\, \mathbb{S}$ sedeniyonu verilsin. Bu durumda $R_Z: \mathbb{S} \to \mathbb{S}$, $R_Z(X) = XZ(sağ\ çarpım)$dönüşümüne oktoniyon katsayılı sedeniyon üzerinde sağ dönüşüm adı verilir.

Not 3.1 Burada ve aşağıda verilen dönüşümlerin lineer olmadığına dikkat edilmelidir, çünkü sedeniyonların çarpım işlemi birleşme özelliğine sahip değildir. Buna rağmen bu dönüşümlerin çarpım şeklinde kullanılmasının nedeni Teorem 2.1 ile verilen özelliklerin çarpım şeklinde olmasıdır. Buradan hareketle aşağıda verilen tanımların ve teoremlerin özel bazı durumları temsil ettiği söylenebilir.

Tanım 3.2 $Z = O_1 + O_2 e_8 \ \epsilon\, \mathbb{S}$ sedeniyonu verilsin. Bu durumda $L_Z: \mathbb{S} \to \mathbb{S}$, $L_Z(X) = ZX(sol\ çarpım)$ dönüşümüne oktoniyon katsayılı sedeniyon üzerinde sol dönüşüm adı verilir.

Teorem 3.1 Oktoniyon katsayılı sedeniyonlar özel sağ ve özel sol olmak üzere iki farklı 2x2 tipinde matris ile temsil edilebilirler.

İspat: Oktoniyon katsayılı sedeniyonların çarpım özelliği kullanılırsa,

$$R_Z(1) = 1 \cdot Z = (1 + 0e_8) \cdot (O_1 + O_2 e_8) = O_1 + O_2 e_8$$
$$R_Z(e_8) = e_8 \cdot Z = (0 + 1e_8) \cdot (O_1 + O_2 e_8) = -\overline{O_2} + \overline{O_1} e_8$$

ve

$$L_Z(1) = Z \cdot 1 = (O_1 + O_2 e_8) \cdot (1 + 0e_8) = O_1 + O_2 e_8$$
$$L_Z(e_8) = Z \cdot e_8 = (O_1 + O_2 e_8) \cdot (0 + 1e_8) = -O_2 + O_1 e_8$$

elde edilir. Bu durumda oktoniyon katsayılı sedeniyonların özel sağ ve özel sol matris gösterimlerin kümesi, sırasıyla,

$$[S_{\mathbb{O}}]_{2x2}^{R} = \left\{ Z_R = \begin{bmatrix} O_1 & O_2 \\ -\overline{O_2} & \overline{O_1} \end{bmatrix} : O_1, O_2 \epsilon\ \mathbb{O} \right\}$$

ve

$$[S_{\mathbb{O}}]_{2x2}^{L} = \left\{ Z_L = \begin{bmatrix} O_1 & O_2 \\ -O_2 & \overline{O_1} \end{bmatrix} : O_1, O_2 \epsilon\ \mathbb{O} \right\}$$

şeklindedir.

3.2 $\mathbb{H}$- Katsayılı Sedeniyonların Matris Gösterimleri

Tanım 3.3 $Z = Q_1 + Q_2 e_4 + Q_3 e_8 + Q_4 e_{12} \epsilon\, \mathbb{S}$ sedeniyonu verilsin. Bu durumda $R_Z: \mathbb{S} \to \mathbb{S}$, $R_Z(X) = XZ(sağ\ çarpım)$ dönüşümüne kuaterniyon katsayılı sedeniyon üzerinde sağ dönüşüm adı verilir.

Tanım 3.4 $Z = Q_1 + Q_2 e_4 + Q_3 e_8 + Q_4 e_{12} \ \epsilon\, \mathbb{S}$ sedeniyonu verilsin. Bu durumda $L_Z: \mathbb{S} \to \mathbb{S}$, $L_Z(X) = ZX(sol\ çarpım)$ dönüşümüne kuaterniyon katsayılı sedeniyon üzerinde sol dönüşüm adı verilir.

Teorem 3.2 Kuaterniyon katsayılı sedeniyonlar özel sağ ve özel sol olmak üzere iki farklı 4x4 tipinde matris ile temsil edilebilirler.
İspat: Kuaterniyon katsayılı sedeniyonların çarpım özelliği ve Teorem 2.1 özellik **7)** kullanılırsa,

$$R_Z(1) = 1 \cdot (Q_1 + Q_2 e_4 + Q_3 e_8 + Q_4 e_{12}) = Q_1 + Q_2 e_4 + Q_3 e_8 + Q_4 e_{12}$$

$$R_Z(e_4) = e_4 \cdot (Q_1 + Q_2 e_4 + Q_3 e_8 + Q_4 e_{12}) = e_4 Q_1 + e_4(Q_2 e_4) + e_4(Q_3 e_8) + e_4(Q_4 e_{12})$$

$$= \overline{Q_1}e_4 + e_4(e_4\overline{Q_2}) + e_4(e_8\overline{Q_3}) + e_4(e_{12}\overline{Q_4}) = \overline{Q_1}e_4 - \overline{Q_2} + e_{12}\overline{Q_3} - e_8\overline{Q_4}$$
$$= -\overline{Q_2} + \overline{Q_1}e_4 - \overline{\overline{Q_4}}e_8 + \overline{\overline{Q_3}}e_{12} = -\overline{Q_2} + \overline{Q_1}e_4 - Q_4e_8 + \overline{Q_3}e_{12}$$

$$R_Z(e_8) = e_8 \cdot (Q_1 + Q_2e_4 + Q_3e_8 + Q_4e_{12}) = e_8Q_1 + e_8(Q_2e_4) + e_8(Q_3e_8) + e_8(Q_4e_{12})$$
$$= \overline{Q_1}e_8 + e_8(e_4\overline{Q_2}) + e_8(e_8\overline{Q_3}) + e_8(e_{12}\overline{Q_4}) = \overline{Q_1}e_8 - e_{12}\overline{Q_2} - \overline{Q_3} + e_4\overline{Q_4}$$
$$= -\overline{Q_3} + \overline{Q_1}e_8 + \overline{\overline{Q_4}}e_4 - \overline{\overline{Q_2}}e_{12} = -\overline{Q_3} + Q_4e_4 + \overline{Q_1}e_8 - Q_2e_{12}$$

$$R_Z(e_{12}) \quad = e_{12} \cdot (Q_1 + Q_2e_4 + Q_3e_8 + Q_4e_{12}) = e_{12}Q_1 + e_{12}(Q_2e_4) + e_{12}(Q_3e_8) + e_{12}(Q_4e_{12})$$
$$= \overline{Q_1}e_{12} + e_{12}(e_4\overline{Q_2}) + e_{12}(e_8\overline{Q_3}) + e_{12}(e_{12}\overline{Q_4}) = \overline{Q_1}e_{12} + e_8\overline{Q_2} - e_4\overline{Q_3} - \overline{Q_4}$$
$$= -\overline{Q_4} + \overline{Q_1}e_{12} - \overline{\overline{Q_3}}e_4 + \overline{\overline{Q_2}}e_8 = -\overline{Q_4} - Q_3e_4 + Q_2e_8 + \overline{Q_1}e_{12}$$

ve

$$L_Z(1) = (Q_1 + Q_2e_4 + Q_3e_8 + Q_4e_{12}) \cdot 1 = Q_1 + Q_2e_4 + Q_3e_8 + Q_4e_{12}$$

$$L_Z(e_4) = (Q_1 + Q_2e_4 + Q_3e_8 + Q_4e_{12}) \cdot e_4 = Q_1e_4 + (Q_2e_4)e_4 + (Q_3e_8)e_4 + (Q_4e_{12})e_4$$
$$= -Q_2 + Q_1e_4 + Q_4e_8 - Q_3e_{12}$$

$$L_Z(e_8) = (Q_1 + Q_2e_4 + Q_3e_8 + Q_4e_{12}) \cdot e_8 = Q_1e_8 + (Q_2e_4)e_8 + (Q_3e_8)e_8 + (Q_4e_{12})e_8$$
$$= -Q_3 - Q_4e_4 + Q_1e_8 + Q_2e_{12}$$

$$L_Z(e_{12}) = (Q_1 + Q_2e_4 + Q_3e_8 + Q_4e_{12}) \cdot e_{12} = Q_1e_{12} + (Q_2e_4)e_{12} + (Q_3e_8)e_{12} + (Q_4e_{12})e_{12}$$
$$= -Q_4 + Q_3e_4 + Q_2e_8 + Q_1e_{12}$$

elde edilir. Bu durumda kuaterniyon katsayılı sedeniyonların özel sağ ve özel sol matris gösterimlerin kümesi, sırasıyla,

$$[S_{\mathbb{H}}]_{4x4}^{R} = \left\{ Z_R = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \\ -\overline{Q_2} & \overline{Q_1} & -Q_4 & \overline{Q_3} \\ -\overline{Q_3} & Q_4 & \overline{Q_1} & -Q_2 \\ -\overline{Q_4} & -Q_3 & Q_2 & \overline{Q_1} \end{bmatrix} : Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \epsilon \ \mathbb{H} \right\}$$

ve

$$[S_{\mathbb{H}}]_{4x4}^{L} = \left\{ Z_L = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \\ -Q_2 & Q_1 & Q_4 & -Q_3 \\ -Q_3 & -Q_4 & Q_1 & Q_2 \\ -Q_4 & Q_3 & Q_2 & Q_1 \end{bmatrix} : Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \epsilon \ \mathbb{H} \right\}$$

şeklindedir.

Not 3.1 Sedeniyonların kompleks katsayılı

$$Z = z_1 + z_2e_2 + z_3e_4 + z_4e_6 + z_5e_8 + z_6e_{10} + z_7e_{12} + z_8e_{14}$$

gösterimleri için de benzer şekilde sağ ve sol matris gösterim kümesi bulunabilir.

4. Sonuç ve Öneriler

Bu makalede sedeniyonların kompleks, kuaterniyon ve oktoniyon katsayılı gösterimleri kullanılarak farklı tipten eşlenikleri tanımlanmıştır. Daha sonra bu eşlenikler yardımıyla önerme ve teorem yardımıyla sedeniyonlar için bazı önemli özellikler elde edilmiştir. Son olarak, sedeniyonlar için bazı özel matris gösterimleri elde edilerek bundan sonra yapılabilecek çalışmalar bir temel oluşturulmuştur.

Araştırma ve Yayın Etiği Beyanı

Yapılan çalışmada araştırma ve yayın etiğine uyulmuştur.

Kaynaklar

[1] Kim J. E., Ha S.J., Shon K.H. 2014. Properties of hyperholomorphic functions on dual sedenion numbers. Honam Mathematical Journal, 36 (4): 921-932.

[2] Imaeda K., Imaeda M. 2000. Sedenions: algebra and analysis. Applied Mathematics and Computation, 115: 77-88.

[3] Carmody K. 1997. Circular and hyperbolic quaternions, octonions, and sedenions further results. Applied Mathematics and Computation, 84 (1): 27-47.

[4] Messelmi F. 2015. Dual-complex numbers and their holomorphic functions. https://hal.archives-ouvertes.fr (Erişim Tarihi: 20.01.2021).

[5] Carmody K. 1988. Circular and hyperbolic quaternions, octonions, and sedenions. Applied Mathematics and Computation, 28 (1):47-72.

[6] Taşyurdu Y., Akpınar A. 2020. Perrin octonions and Perrin sedenions. Konuralp Journal of Mathematics, 8 (2): 384-390.

[7] Soykan Y., Okumuş İ., Taşdemir E. 2020. On generalized tribonacci sedenions. Sarajevo Journal of Mathematics, 16 (1): 103-122.

[8] Catarino P. (2019). k-Pell, k-Pell–Lucas and modified k-Pell sedenions. Asian-European Journal of Mathematics, 12 (2):1950018.

[9] Bilgici G., Tokeser Ü., Ünal Z. 2017. Fibonacci and Lucas Sedenions. Journal of Integer Sequences, 20 (1): 17-18.

[10] Degtereva M. P. On some properties of sedenions. Doklady Akademii Nauk, 67:965-967.

[11] Sorgsepp L., Lohmus J. 1981. Binary and ternary sedenions. Hadronic Journal, 4 (2), 327-353.

[12] Müller H.E. Hypercomplex numbers and their matrix representations. https://herbert-mueller.info (Erişim Tarihi: 15.11.2020).

[13] Okubo S. 1995. Introduction to Octonion and Other Non-associative Algebras in Physics, Cambridge University Press, Cambridge.

[14] Baez J. 2002. The octonions, Bulletin of American Mathematical Society, 39 (2): 145-205.

[15] Tanışlı M., Kansu, M.E. 2011. Octonionic Maxwell's equations for bi-isotropic media. Journal of Mathematical Physics, 52: (5), 053511.

[16] Cawagas R.E., Carrascal A.S., Bautista L.A., Maria J., Urrutia J.D., Nobles B.G. 2009. The Subalgebra Structure of the Cayley-Dickson Algebra of Dimension 32 (trigintaduonion) https://arxiv.org/abs/0907.2047 (Erişim Tarihi: 20.01.2021).