BEÜ Fen Bilimleri Dergisi
8 (4), 1203-1208, 2019

BEU Journal of Science
8 (4), 1203-1208, 2019

Araştırma Makalesi / Research Article

3/2 Ağırlıklı Hecke Eigenformlar Üzerine

İlker İNAM*, Ezgi CIVGIN

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi, Matematik Bölümü, Bilecik
(ORCID: 0000-0001-5765-1718) (ORCID: 0000-0002-2891-1274)

Özet
Bu makalede Shimura yükseltmesi ve modülarite teoremi yardımıyla eliptik eğrilere karşılık gelen, kuadratik formların teta serileri yardımıyla verilen 3/2 ağırlıklı üç adet Hecke Eigenformunu, ait oldukları yarım tamsayı ağırlıklı modüler form uzaylarının bazı baz vektörleri cinsinden ifade ediyoruz. İspatlarda bu Hecke Eigenformların Fourier açılımlarının ilk terimlerini ve seçilen bazı karşılaştırıyoruz ve de iki modüler formun eğer Fourier açılımlarının ilk terimleri Sturm sınırına kadar aynı ise birbirine eşit olduğu gerçeğini kullanıyoruz.

Anahtar kelimeler: Modüler Formlar, Eliptik Eğriler, Kuadratik Formlar, Yarım Tamsayı Ağırlıklı Hecke Eigenformlar.

On Hecke Eigenforms of Weight 3/2

Abstract
In this article we express three Hecke eigenforms of weight 3/2 corresponding to elliptic curves via the Shimura lift and the modularity theorem that are given in terms of theta series of ternary quadratic forms in terms of a basis of the respective spaces of modular forms of half-integral weight. For the proof we compare the first terms of the Fourier expansions of these Hecke eigenforms and the chosen basis' and use the fact that two modular forms are equal if the first Fourier coefficients up to the Sturm bound coincide.

Keywords: Modular Forms, Elliptic Curves, Quadratic Forms, Half Integral Weight Hecke Eigenforms.

1. Giriş

Modüler formlar ve eliptik eğriler 1994'te Andrew Wiles'ın ispatladığı matematiğin 359 yıllık problemi Fermat'ın Son Teoremi'nin ispatında kullanılması nedeniyle birbiriyle sıkı sıkıya bağlantılı ve popülerliğini koruyan iki konusudur. Bu bağlantı Taniyama-Shimura Konjektürü'nden gelir, bu ise her bir eliptik eğrinin bir modüler formla eşleştiğini iddia eder. Modüler formlar uzayı $\mathbb{C}$ üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı olduğu için oldukça ilgi çekici özelliklere sahiptir.

Kuadratik formlar tamsayıların aritmetiğinin önemli bir parçasını oluşturur. Tamsayıların ikili kuadratik formlarla temsili problemi sayılar teorisinin eski problemlerinden birisidir. Kuadratik formların teta serileri birer modüler form olduğu için bu iki teori de birbirine bu şekilde bağlıdır.

Bu çalışmada bazı kuadratik formların teta serilerinin klasik teta fonksiyonu ile çarpımından elde edilen ve Shimura yükseltmesiyle belirli eliptik eğrilere karşılık gelen 3/2 ağırlıklı Hecke eigenformlar ait oldukları vektör uzayının taban vektörleri cinsinden ifade edilecektir. Modüler formlar için verilen Sturm sınırı kullanılarak yeterince Fourier katsayısı birbirine eşit olan iki modüler formun birbirine eşit olduğu gerçeği kullanılarak ispatlar yapılacaktır. Modüler formların Fourier açılımlarının bilgisayar yardımıyla (gerekirse büyük indisler için) hesaplanmasında Magma [1] ile Pari/GP [7] cebir yazılımları kullanılmıştır. Yüksek performans gerektiren geniş aralıklarda yapılan hesaplamalar için (özellikle kuadratik formların teta serileri ile klasik teta serilerinin çarpımında) Fast Fourier Transform özelliğine sahip Magma ön plana çıkarken, modüler formlara ait "mf" paketiyle Pari/GP, Magma'da olmayan birçok özelliğe sahiptir. Bu makalede elde edilen sonuçlar için Pari/GP'de [7] yer alan "mf"

*Sorumlu yazar: ilker.inam@bilecik.edu.tr
Geliş Tarihi: 01.04.2019, Kabul Tarihi: 19.07.2019

paketi kullanılmıştır. Sturm sınırının belirlenmesi, verilen kuadratik formların teta serilerinin hesaplanması ve Hecke eigenformların Fourier açılımının bulunmasında bu paket kullanılmıştır. Farklı bir problemde eğer çok fazla katsayı elde edilmek istenirse iki Fourier açılımının çarpımında [1] Magma programı kullanılmalıdır.

2. Materyal ve Metot

Bu bölümde çalışmada kullanılacak kavramlar tanıtılacaktır. Makale boyunca $\mathcal{H}$ ile karmaşık üst yarı düzlem, $PSL(2, \mathbb{Z})$ ile katsayıları tamsayı ve $ad - bc = 1$ olmak üzere $\frac{az+b}{cz+d}$ biçimindeki lineer kesirli dönüşümlerin grubu ve Γ ile modüler grup gösterilecektir.

Tanım 2.1. [6] $f(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} X_i^2 + \sum_{i>j} a_{ij} X_i X_j$ biçiminde tanımlanan fonksiyona $\mathbb{Z}$ üzerinde tanımlı n değişkenli kuadratik form adı verilir. f'nin pozitif definite ve D diskriminantına sahip olduğu kabul edilsin. Bu durumda $q = e^{2\pi i \tau}$ ve $\tau \in \mathcal{H}$ olmak üzere f kuadratik formuna karşılık gelen teta serisi $\Theta(f)$ ile gösterilir ve

$$\Theta(f)(z) := \sum_{\underline{x} \in \mathbb{Z}^n} q^{f(\underline{x})}$$

olarak tanımlanır. Burada $q = e^{2\pi i \tau}$ şeklindedir.

Tanım 2.1'e dikkat edilirse aslında kuadratik formun teta serisi bir tamsayının verilen kuadratik form tarafından temsil edildiği durumlardan oluşmaktadır. Kolayca görülebilir ki "iki kuadratik forma karşılık gelen katsayı matrisleri R halkası üzerinde birbirine benzer ise bu iki kuadratik form birbirine denktir" şeklinde tanımlanan bağıntı D diskriminantına sahip tüm kuadratik formların kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olur, bu denklik bağıntısının denklik sınıflarından birisi k olsun, f kuadratik formu k denklik sınıfından alınsın ve katsayı matrisi A olsun. $N \in \mathbb{N}$ sayısı $N.A^{-1}$ matrisi tamsayı girdilere sahip ve diyagonal üzerinde çift sayı olacak şekildeki en küçük sayı olarak seçilsin. Öte yandan D, f'nin diskriminantı yani A katsayı matrisinin determinantı ve

$$t := \begin{cases} 2D & n \equiv 1 \ (mod\ 2) \\ -D & n \equiv 2 \ (mod\ 4) \\ D & n \equiv 0 \ (mod\ 4) \end{cases}$$

olarak tanımlansın ve χ_t, $\mathbb{Q}(\sqrt{t})/\mathbb{Q}$'ya karşılık gelen karakter olsun ve aşikar karakteri id ile gösterilsin. Bu takdirde kuadratik formların modüler formlar ile ilişkisi aşağıdaki teoremde verilmiştir:

Tanım 2.2. $k \in \mathbb{Z}$ olsun ve $F: \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu göz önüne alınsın.

1. Eğer her $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ ve $\tau \in \mathcal{H}$ için
$$F(\gamma(\tau)) = (cz + d)^k F(\tau)$$

oluyor ise F'ye Γ için k ağırlıklı zayıf modüler adı verilir.

2. Eğer F, $\mathcal{H}$ üzerinde analitik ve $Im(\tau) \to \infty$ yapıldığında $|F(\tau)|$ sınırlı kalıyor ise F'ye Γ için k ağırlıklı modüler form denir. Bu özellikteki modüler formların kümesi $M_k(\Gamma)$ ile gösterilir.
3. Eğer $Im(\tau) \to \infty$ yapıldığında $F(\tau)$ sıfıra yakınsıyor ise F'ye Γ için k ağırlıklı cusp form denir. Bu özellikteki cusp formların kümesi $S_k(\Gamma)$ ile gösterilir.

Eğer modüler form ya da cusp form Γ'nın alt grubu $\Gamma_0(N)$ üzerinde tanımlanıyorsa bu durumda tanıma "N seviyeli" eklenir.

Teorem 2.1. [6] $\Theta(k) \in M_{\frac{n}{2}}(N, \chi_t)$'dir.

Dikkat edilirse $n = 2$ durumunda ikili kuadratik formların teta serileri belirli koşullar altında 2-ağırlıklı modüler form olur. Bu çalışmada tamamen aşikar karakter ile çalışılmıştır ve ilgili yerlerde bu durum "*id*" ile gösterilmiştir.

Serre-Stark Teoremi'nin [6], özel bir durumu olarak 1/2-ağırlıklı modüler formlara güzel bir örnek klasik teta serileridir.

Teorem 2.2. [6] l pozitif bir tamsayı olsun. Bu takdirde

$$\Theta_{id,l} \coloneqq 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{ln^2}$$

olarak tanımlanan klasik teta serisi için $\Theta_{id,l} \in M_{\frac{1}{2}}(N)$'dir.

Uyarı 2.1. Burada modüler formların çalışma kapsamında kullanılacak bazı özellikleri sıralanacaktır. Tüm detaylar [3] veya modüler formlarda klasikleşmiş başka bir kaynaktan bulunabilir. Buna göre, $M_k(\Gamma)$ ve $S_k(\Gamma)$, $\mathbb{C}$ üzerinde birer sonlu boyutlu vektör uzayı olur. $T(z) = z + 1$ dönüşümü modüler grubun üretecidir ve F bir modüler form ise tanım gereği $F(z + 1) = F(z)$ olmak zorundadır, bu nedenle F modüler formunun $F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ şeklinde bir Fourier açılımı vardır. Burada tıpkı Tanım 2.1'de olduğu gibi $q = e^{2\pi i\,\tau}$ şeklindedir.

Uyarı 2.2. k bir tamsayı olmak üzere $k + 1/2$ şeklindeki sayılara yarım tamsayı denir. Bazı teknik hazırlıkların ardından $k + 1/2$ yani yarım tamsayı ağırlıklı modüler formlar da tanımlanabilir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta yarım tamsayı ağırlıklı modüler formlar $\Gamma_0(4N)$ alt grubu üzerinde tanımlanabilir.

Uyarı 2.3. f, k ağırlıklı bir modüler form ve g, l ağırlıklı bir modüler form olmak üzere fg, $k + l$ ağırlıklı bir modüler form olur. Yarım tamsayı ağırlıklı modüler formlar için de bu özellik geçerlidir [4].

Uyarı 2.4. $M_k(\Gamma)$ ve $S_k(\Gamma)$, $\mathbb{C}$ üzerinde birer sonlu boyutlu vektör uzayı olduğundan bu uzaylar üzerinde bir lineer operatör yani her bir $n > 1$ sayısı için n. Hecke operatörü tanımlanabilir. Bu lineer dönüşümün özdeğerlerinin oluşturduğu öz vektör ise Hecke eigenform olarak adlandırılır.

Şimdi ise yarım tamsayı ağırlıklı modüler formlar için boyut formülleri göz önüne alınsın.

Tanım 2.3. F, χ'in kondüktörü olsun. $s_2 \neq 1$ ve $s_p \leq r_p$ olmak üzere

$$N = \prod_{p|N} p^{r_p} \text{ ve } F = \prod_{p|N} p^{s_p}$$

olarak tanımlansın. λ_p sabitleri ise aşağıdaki gibi tanımlansın:

(1) $p \geq 3$ veya $p = 2$ ve $r_2 \geq 4$ için

$$\lambda_p = \begin{cases} p^{\lfloor r_p/2 \rfloor} + p^{\lfloor (r_p-1)/2 \rfloor} & ;\ 2s_p \leq r_p\ , \\ 2p^{r_p - s_p} & ;\ 2s_p > r_p \end{cases}$$

(2) Eğer $r_2 = 3$ ise $\lambda_2 = 3$ alınır. Eğer $r_2 = 2$, ise bu takdirde (C) koşulu dikkate alınır: $p \equiv 3 \pmod 4$ olmak üzere $p \mid N$ olacak şekilde p asalı vardır ve ya r_p tek sayı ya da $0 < r_p < 2s_p$ olur. Bu takdirde eğer (C) koşulu sağlanırsa $\lambda_2 = 2$ alınır, aksi takdirde; $\lambda_2 = 2 + (-1)^{\frac{s_2}{2} + k + 1/2}/2$ olarak alınır.

Buna göre yarım tamsayı ağırlıklı modüler form uzaylarının boyutları aşağıdaki teoremde verilmiştir. Burada χ Dirichlet karakteri için verilen sonuçlar bu çalışmanın özelinde aşikâr karakter için de doğal olarak aynen geçerlidir.

Teorem 2.3. [2] $k \in 1/2 + Z$ olsun. Bu takdirde;

$$\dim(S_k(\Gamma_0(N),\chi)) - \dim(M_{2-k}(\Gamma_0(N),\overline{\chi})) = \frac{k-1}{2} N\prod_{p|N}(1+\frac{1}{p}) - \frac{1}{2}\prod_{p|N}\lambda_p.$$

olur. Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı $R(N, k, \chi)$ ile gösterilirse bu durumda $k \geq 5/2$ için;

$$\dim(S_k(\Gamma_0(N),\chi)) = R(N, k, \chi)$$
$$\dim(M_{2-k}(\Gamma_0(N),\overline{\chi})) = R(N, 2-k, \chi)$$

iken

$$\dim(S_{3/2}(\Gamma_0(N),\chi)) = R(N, 3/2, \chi) + \dim(M_{1/2}(\Gamma_0(N),\chi))$$
$$\dim(M_{3/2}(\Gamma_0(N),\chi)) = -R(N, 1/2, \chi) + \dim(S_{1/2}(\Gamma_0(N),\chi)),$$

olur. Burada 1/2 ağırlıklı boyutlar Serre–Stark teoreminden elde edilir.

Teorem 2.4. [8] $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n,\ g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n q^n \in M_k(\Gamma_0(N))$ olsun. d_N sayısı $\Gamma_0(N)$'in $PSL_2(\mathbb{Z})$'deki görüntüsünün indeksi olmak üzere

$$M := \frac{kd_N}{12}$$

sayısı tanımlansın. Eğer $0 \leq i \leq M$ için $a_i = b_i$ ise bu takdirde $f = g$ olur.
M sayısına Sturm sınırı adı verilir.

3. Temel Sonuçlar ve İspatlar

Teorem 3.1. [6] Yukarıda ki notasyonu kabul edilsin. Bu takdirde;

$$f_1 := [\theta(X^2+11Y^2) - \theta(3X^2+2XY+4Y^2)].\theta_{id,11} \in S_{\frac{3}{2}}(\Gamma_0(44))$$

olur. Üstelik f_1 bir Hecke eigenformdur.

Teorem 3.2. $v_1 = q - q^4 - q^5 + O(q^{12})$ ve $v_2 = q^3 - q^4 - q^{11} + O(q^{12})$ için $\{v_1,v_2\}$, $S_{\frac{3}{2}}(\Gamma_0(44))$ uzayının bir bazı olmak üzere;

$$f_1 = 2v_1 - 2v_2\text{'dir.}$$

İspat. Teorem 2.3'den dolayı $\dim(S_{3/2}(\Gamma_0(44))=2$'dir. v_1 ve v_2 vektörlerinin lineer bağımsız olduğu açıktır. Sturm sınırı, yani Teorem 2.4 gereği bu uzayda iki vektörün birbirine eşit olması için ilk 4 Fourier katsayısının eşit olması yeterlidir. Kolayca gösterilebilir ki v_1 *ve* v_2 vektörleri $S_{\frac{3}{2}}(\Gamma_0(44))$ uzayını gerer. Buna göre $v_1 = q - q^4 - q^5 + O(q^{12})$ ve $v_2 = q^3 - q^4 - q^{11} + O(q^{12})$ için $\{v_1,v_2\}$, $S_{\frac{3}{2}}(\Gamma_0(44))$ uzayının bir bazı olur. O halde $f_1=c_1v_1+c_2v_2$ olacak şekilde c_1 ve c_2 sayıları vardır.

$$\theta(X^2+11Y^2) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{11} + 4q^{12} + 4q^{15} + 4q^{20} + 2q^{25} + O(q^{26}),$$
$$\theta(3X^2+2XY+4Y^2) = 1 + 2q^3 + 2q^4 + 2q^5 + 2q^9 + 4q^{12} + 2q^{15} + 2q^{16} + 4q^{20} + 2q^{23} + O(q^{25}),$$
$$\Theta_{id,11} = 1 + 2q^{11} + 2q^{44} + 2q^{99} + O(q^{100})$$

olup,

$$f_1 = 2q - 2q^3 - 2q^5 + 2q^{11} + 4q^{12} - 4q^{14} + 2q^{15} - 4q^{16} + 4q^{22} - 2q^{23} + O(q^{24})$$

olarak elde edilir. Kolayca görülebilir ki $c_1 = 2$ ve $c_2 = -2$ olarak bulunur. Bu durum için Sturm sınırı 4 olup $f=\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n q^n$ ve $2v_1 - 2v_2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n$ için $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, $a_3=b_3$ ve $a_4=b_4$ olması iki cusp formun birbirine eşit olması için yeterlidir. Bu ise ispatı bitirir.

Teorem 3.3. [6] Yukarıda ki notasyonu kabul edilsin. Bu takdirde;

$$f_2 := [\theta(X^2+14Y^2) - \theta(2X^2-7Y^2)].\theta_{id,14} \in S_{\frac{3}{2}}(\Gamma_0(56))$$

olur. Üstelik f_2 bir Hecke eigenformdur.

Teorem 3.4. $v_1 = q - q^2 - q^9 + O(q^{12})$ ve $v_2 = q^4 - q^7 - q^8 + O(q^{12})$ için $\{v_1, v_2\}$, $S_{\frac{3}{2}}(\Gamma_0(56))$ uzayının bir bazı olmak üzere;

$$f_2 = 2v_1 - 2v_2\text{'dir.}$$

İspat. Teorem 3.2 ve Teorem 2.3'deki argümanlar kullanılarak dim($S_{3/2}$ ($\Gamma_0(56)$)=2 olduğu ve $\{v_1, v_2\}$ kümesinin $S_{\frac{3}{2}}(\Gamma_0(56))$ cusp form uzayının bir bazı olduğu görülebilir. Bu durum için Sturm sınırı 5'dir. Öte yandan

$$\theta\,(X^2+14Y^2) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{14} + 4q^{15} + 2q^{16} + 4q^{18} + 4q^{23} + O(q^{25}),$$
$$\theta\,(2X^2+7Y^2) = 1 + 2q^2 + 2q^7 + 2q^8 + 4q^9 + 4q^{15} + 2q^{18} + O(q^{25})$$

ve

$$\Theta_{id,14} = 1 + 2q^{14} + 2q^{56} + O(q^{100})$$

Olup

$$f_2 = 2q - 2q^2 + 2q^4 - 2q^7 - 2q^8 - 2q^9 + 2q^{14} + 4q^{15} - 2q^{16} + 6q^{18} - 4q^{21} - 4q^{22} + O(q^{25})$$

olarak elde edilir. O halde $f_2 = c_1v_1 + c_2v_2$ olacak şekilde c_1 ve c_2 sayıları vardır. Buradan $c_1 = 2$ ve $c_2 = -2$ elde edilir. Eşitliğin her iki yanının ilk 5 Fourier katsayısı birbirine eşit olduğu için bu iki cusp form Sturm sınırı gereği birbirine eşittir.

Teorem 3.5. [6] Yukarıda ki notasyonu kabul edilsin. Bu takdirde;

$$f_3 := [\theta(3X^2 - 2XY + 23Y^2) - \theta(7X^2 + 6XY + 7Y^2)].\theta_{id,17} \in S_{\frac{3}{2}}(\Gamma_0(68))$$

olur. Üstelik f_1 bir Hecke eigenformdur.

Teorem 3.6. $v_1 = q - q^2 + q^4 - q^8 - q^9 + O(q^{12})$, $v_2 = q^3 - q^7 - q^{11} + O(q^{12})$ ve $v_3 = q^5 - q^6 - q^7 + q^{10} + O(q^{12})$ için $\{v_1, v_2, v_3\}$, $S_{\frac{3}{2}}(\Gamma_0(68))$ uzayının bir bazı olmak üzere;

$$f_3 = 2v_2\text{'dir.}$$

İspat. Teorem 3.2 ve Teorem 2.3'deki argümanlar kullanılarak dim($S_{3/2}$ ($\Gamma_0(68)$)=2 olduğu ve $\{v_1, v_2, v_3\}$ kümesinin $S_{\frac{3}{2}}(\Gamma_0(68))$ cusp form uzayının bir bazı olduğu görülebilir. Bu durum için Sturm sınırı 6'dır. Öte yandan

$$\theta(3X^2 - 2XY + 23Y^2) = 1 + 2q^3 + 2q^{12} + 2q^{23} + 2q^{24} + O(q^{25}),$$
$$\theta(7X^2 + 6XY + 7Y^2) = 1 + 2q^7 + 2q^{11} + 2q^{12} + 2q^{24} + o(q^{25})$$

ve

$$\Theta_{id,17} = 1 + 2q^{17} + 2q^{68} + O(q^{100})$$

olup

$$f_3 = 2q^3 - 2q^{17} - 2q^{11} + 4q^{20} + 2q^{23} - 4q^{24} + O(q^{25})$$

olarak elde edilir. O halde $f_3 = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ olacak şekilde c_1, c_2 ve c_3 sayıları vardır. Buradan $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ ve $c_3 = 0$ elde edilir. Bir kez daha Teorem 2.4 gereği ispat bitmiş olur.

Uyarı 3.7. Makalenin kapsamında olmadığı için eliptik eğriler konusuna yer verilmemiştir. Ancak Modülarite Teoremi ve Shimura Yükseltmesi kullanılarak f_1 Hecke eigenformunun "11a1" Cremona etiketli, f_2 Hecke eigenformunun "14a1" Cremona etiketli ve son olarak f_3 Hecke eigenformunun "17a1" Cremona etiketli eliptik eğriye karşılık geldiği söylenebilir. Modüler formlar ile eliptik eğriler arasındaki "L-serileri" yardımıyla elde edilen bu "büyülü" ilişkinin sayısal örneklerle hissedilmesi okuyucuya bırakılmıştır, Magma ve Pari/GP programları bu örneklerde etkin olarak kullanılabilir [5].

3. Sonuç ve Öneriler

Literatürde herhangi bir ağırlıktaki yarım tamsayı ağırlıklı Hecke eigenformların sistematik seçimi açık problem olarak yer almaktadır. Bu çalışmada kullanılan 3/2 ağırlıklı cusp formlar aslında Hecke eigenformlardır ve [6] çalışmasının önemini gösterir. Öte yandan f_1, f_2 ve f_3 Hecke eigenformlarının Fourier açılımlarına dikkat edilirse pozitif terimlerin sayısı ile negatif terimlerin sayısı birbirine oldukça yakındır. Bu sürpriz bir sonuç değildir. Bruinier-Kohnen İşaret Eşdağılım Konjektürü'nün sayısal olarak desteklendiği bir durumdur. Yarım tamsayı ağırlıklı Hecke eigenformların sistematik seçimi problemi ve Bruinier-Kohnen İşaret Eşdağılım Konjektürü birinci yazarın aşağıdaki Tübitak araştırma projesinin iki problemidir ve özellikle ikincisi literatürde yer alan zor problemlerden birisidir.

Teşekkür

Bu çalışma ayrı ayrı ve kısmi olarak 118F148 nolu Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) 1001 projesi ve Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi 2018-01.BŞEÜ.04-01 nolu projesi tarafından desteklenmektedir.

Kaynaklar

[1] Bosma W., Cannon J., Playsout C. 1997. The Magma Algebra System I, The User Language. J. Symbolic Comput., 24: 235-265.

[2] Cohen H., Oesterlé J. 1977. Dimensiones des espaces de formes modulaires, Modular Functions of One Variable. VI (Proc. Second Internat. Conf., Univ. Bonn, Bonn), Springer, 69-78.

[3] Cohen H., Strömberg F. 2017. Modular Forms: A Classical Approach. Amer. Math. Society, Graduate Studies in Mathematics, 179.

[4] Cohen H. 2019. Modular Forms, Notes from International Autumn School on Computational Number Theory (Tutorials, Schools, and Workshops in the Mathematical Sciences). Eds: Ilker Inam and Engin Büyükaşık, 3-62.

[5] Cremona Database 2019. https://johncremona.github.io/ecdata/ (Erişim Tarihi: 19.07.2019).

[6] Frey G. 1994. Construction and Arithmetical Applications of Modular Forms of Low Weight. CRM Proceedings & Lecture Notes Amer. Math. Soc., 4: 1-21.

[7] Pari/GP Computer Algebra System 2019. https://pari.math.u-bordeaux.fr (Erişim Tarihi: 19.07.2019).

[8] Stein W. 2007. Modular Forms, a Computational Approach. Amer. Math. Society, Graduate Studies in Mathematics, 79.