BEU Journal of Science
5(2), 149-155, 2016

Araştırma Makalesi / Research Article

Q-Holomorf Fonksiyonların Matris Analitik Fonksiyonlarla İlişkisi

Sezayi HIZLIYEL[1*]

Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü 16059 Nilüfer, Bursa-TÜRKİYE

Özet
Bu makalede, Q-holomorf fonksiyonlar ile matris analitik fonksiyonlar arasındaki ilişkisi incelenecektir. Elde edilecek sonuçlar, Kühn [1] tarafından elde edilen her analitik fonksiyon için bir hiperanalitik fonksiyon bulunabilir özelliğini genelleştirir.

Anahtar Kelimeler: Q-Holomorf fonksiyonlar, Genelleştirilmiş Beltrami sistemi

The Relationship Between Q-Holomorphic Functions with Matrix Analytic Functions

Abstract
In this article, the relationship between Q-holomorphic functions and analytic functions will be examined. The obtained results, it generalizes the property that for each analytic function may be found a hyperanalytic function which obtained by Kühn [1].

Keywords: Q-Holomorphic Functions, Generalized Beltrami Systems

1. Giriş

Cauchy Riemann sistemiyle kompleks analitik fonksiyonlar arasındaki ilişki, bir çok matematikçi tarafından daha genel eliptik sistemlere genelleştirilmiş ve analitik fonksiyonların yüksek boyutlu benzerleri elde edilmiştir.

Douglish [2], düzlemde

$$w_x + iw_y + aEw_x + bEw_y = 0 \tag{1}$$

şeklindeki eliptik denklem için analitik fonksiyonlar teorisinin bir benzerini geliştirmiştir. Burada E, $m \times m$-tipinde sabit nilpotent matris yani; k bir tamsayı olmak üzere $E^k = 0$, $E^{k-1} \neq 0$ özelliğinde bir matris, a ve b ise x ve y nin kompleks değerli fonksiyonlarıdır. Daha sonra Bojarski [3], Douglish [2]
fonksiyon teorisini

$$w_{\bar{z}} - Qw_z = 0 \tag{2}$$

şeklindeki matris denkleme genelleştirmiştir. Bojarski [3] de Q'nun $m \times m$-tipinde yarı köşegen bir matris olduğunu ve Q'nun hepsi kompleks olan öz değerlerinin, mutlak değerce 1 den küçük olduğunu farz etmiştir. w ise $m \times 1$- tipinde bilinmeyen matris fonksiyondur. (2) denkleminin çözümleri olan fonksiyonlara hiperanalitik fonksiyon denir. Diğer bir genelleme de Hile [4] tarafından verilmiştir. Hile [4] ise w $m \times s$- tipinde bilinmeyen bir kompleks matris ve Q $m \times m$- tipinde kendisi ile değişmeli (self commuting) yani Q'nun tanım bölgesindeki Ω_0 daki her z_1, z_2 noktası için

*Sorumlu yazar: *hizliyel@uludağ.edu.tr*
Geliş Tarihi: 14.04.2016, Kabul Tarihi: 07.09.2016

$$Q(z_1)Q(z_2) = Q(z_2)Q(z_1) \tag{3}$$

değişme özelliğine sahip, bileşenleri z nin fonksiyonları olan bir matris olmak üzere (2) formundaki matris denklemi (sistemi) göz önüne almış, böylece Douglish [2] ve Bojarski [3] teorisini ihtiva edecek şekilde analitik fonksiyon teorisinin bir benzerini elde etmiştir. Eğer Q her $z \in \Omega_0$ için bir büyüklüğünde karakteristik değere sahip değilse (2) sistemine Genelleştirilmiş Beltrami sistemi ve sistemin çözümlerine Q- holomorf fonksiyonlar denir.

Bu çalışmada Q-holomorf fonksiyonların matris analitik fonksiyonlarla ilişkisini ele alacağız. Elde edilecek sonuçlar, hiperanalitik ve analitik fonksiyonlar arasında Kühn [1] tarafından elde edilen her analitik fonksiyona karşılık bir hiperanalitik fonksiyon bulunabilir özelliğini genelleştirir.
Matris norm olarak, bir $B = (b_{ij})$ matrisi için

$$\|B\|^2 = iz(B^*B) = \sum_{i,j} |b_{ij}|^2 \tag{4}$$

ile tanımlanan standart normu kullanacağız. Kolay anlaşılabilirdik için $m \times s$ tipinde kompleks matris değerli fonksiyonların bazı uzaylarını tanımlayalım: Genelde bir $m \times s$ tipinde kompleks matris değerli verilmiş bir $w = (w_{ij})$ fonksiyonunun bileşenleri olan w_{ij}'ler verilmiş belirli bir uzayda ise w o uzaydadır denir. Örneğin her bir $w_{ij} \in C^n(\Omega)$ ise $w \in C^n(\Omega)$ diyeceğiz. Burada Ω kompleks düzlemde bir bölgedir. $w \in C^{\alpha,n}(\overline{\Omega})$, $(0 < \alpha < 1)$ denir eğer w ve onun n. mertebeye kadar türevleri Ω nın kapanışı $\overline{\Omega}$ de Hölder sürekli ise. Bununla şunu kastediyoruz $\overline{\Omega}$ için c > 0, $0 < \alpha < 1$ olacak şekilde öyle c ve α sabitleri mevcuttur ki tüm $z_1, z_2 \in \overline{\Omega}$ için

$$\|w(z_1) - w(z_2)\| \leq c|z_1 - z_2|^{\alpha} \tag{5}$$

gerçeklenir.

2. Q- Holomorf Fonksiyonlar

Hile Q- holomorf fonksiyonları incelemek için Douglish [2] ve Bojarki [3]'yi takip ederek

$$D := \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - Q\frac{\partial}{\partial z} \tag{6}$$

genelleştirilmiş Belrami operatörü için doğurucu çözüm kavramını vermiştir [4]. Q nun tanım bölgesi Ω_0 da aşağıdaki özelliklere sahip $m \times m$ tipinde bir $\phi = \phi(z)$ kompleks matris değerli fonksiyonuna Ω_0 bölgesinde (4) opratörü için bir doğurucu çözüm denir

(D1) ϕ, Ω_0 da $Dw = 0$ denkleminin C^1 −sınıfından bir çözümüdür.
(D2) ϕ, Ω_0 da kendi ve Q ile değişmelidir.
(D3) her $z, \zeta \in \Omega_0, z \neq \zeta$ için $\phi(\zeta) - \phi(z)$ tersinirdir.
(D4) her $z \in \Omega_0$ için $\phi_z(z)$ tersinirdir.

Ayrıca Hile [4] aşağıdaki teoremleri de ispatlamıştır.

Teorem 2.1 $w = w(z), C^1(\Omega_0)$ sınıfından $m \times s$ tipinde bir kompleks değerli matris fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$\frac{dw(z)}{d\phi(z)} = \lim_{\Delta z \to 0}[\phi(z + \Delta z) - \phi(z)]^{-1}[w(z + \Delta z) - w(z)] \tag{7}$$

limitinin Ω_0'nın bir z noktasında mevcut olması için gerek ve yeter şart, w' nın z noktasında $Dw = 0$ denklemini sağlamasıdır. Bu durumda

$$\frac{dw(z)}{d\phi(z)} = [\phi(z)]^{-1} w_z(z) \tag{8}$$

gerçeklenir.

v, Ω_0 da $Dw = 0$ denkleminin $C^1(\Omega_0\,)$ sınıfından ve Ω_0'da Q ile değişmeli $m\times m$-tipinde bir çözümü olsun. Ω, Ω_0'nın sınırı $\Gamma = \partial\Omega$ olan regüler bir alt bölgesi olsun. Eğer u, $C^1(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})$ sınıfından ve Ω da birinci mertebeden sınırlı türevlere sahip ise,

$$\int_{\Gamma}(dv)u = 2i\iint_{\Omega} v_z(u_{\bar z} - Qu_z)dxdy \tag{9}$$

eşitliği sağlanır [4]
Aşağıdaki sonuç, Teorem 2.2' nin bir sonucudur.

Sonuç 2.3 ϕ, Ω_0'da $Dw = 0$ denklemi için bir doğurucu çözüm; Ω, Ω_0'ın düzgün bir alt bölgesi ve Γ' da Ω'nın sınırı olsun. Eğer w $C(\overline{\Omega})$ sınıfından ve Ω da Q-holomorf ise, bu taktirde

$$\int_{\Gamma}(d\phi)w = 0 \tag{10}$$

Gerçeklenir [4].
Q-holomorf fonksiyonlar için Cauchy integral formülü de ispat edilebilir. Önce aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma2.4 ϕ, Ω_0 da $Dw = 0$ denklemi için bir doğurucu çözüm olsun. Eğer $z \in \Omega_0$ ve z merkezli ε yarıçaplı kapalı daire Ω_0 da bulunuyorsa, bu taktirde

$$\int_{|\zeta - z| = \varepsilon}[\phi(\zeta) - \phi(z)]^{-1}(d\phi)(\zeta) = p \tag{11}$$

olur. Burada p, $Dw = 0$ denklemi için bir p matristir [4].
Teorem 2.5 Ω, Ω_0 bölgesinin regüler bir alt bölgesi $\Gamma = \partial\Omega$, Ω 'nın sınırı, w Ω 'da birinci mertebeden sınırlı türevlere sahip $C^1(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})$ sınıfından ve $m\times s$-tipinde bir matris olsun. Bu taktirde bir $z \in \Omega$ için

$$\begin{aligned} w(z) = p^{-1} &\int_{\Gamma}[\phi(\zeta) - \phi(z)]^{-1}(d\phi)(\zeta)w(\zeta) \\ &- 2ip^{-1}\iint_{\Omega}\phi_{\zeta}(\zeta)[\phi(\zeta) - \phi(z)]^{-1}\left[w_{\bar\zeta}(\zeta) - Q(\zeta)w_{\zeta}(\zeta)\right]d\xi d\eta \end{aligned} \tag{12}$$

sağlanır. Burada $\zeta = \xi + i\eta$ [4].

Sonuç 2.6 (Cauchy İntegral Formülü) w, Ω 'da Q-holomof ve $\overline{\Omega}$ da sürekli olsun. Bu durumda Ω, Ω_0 ın regüler bir alt bölgesi olmak üzere her $z \in \Omega$ için

$$w(z) = p^{-1} \int_{\Gamma} [\phi(\zeta) - \phi(z)]^{-1} d\phi(\zeta) w(\zeta) \tag{13}$$

gerçeklenir [4].

Şimdi işlemlerde kolaylık sağlamak için doğurucu çözümü biraz daha basit yazacağız. Bu basitleştirme ile (2) denklemi daha da basit yazılabilir. Şöyle ki, $Dw = 0$ denkleminin ϕ doğurucu çözümü,

$$\phi(z) = \phi_0(z)I + N(z) \tag{14}$$

şekline sahiptir [4]. Burada $N(z)$ alt üçgensel nilpotent bir matristir, $\phi_0(z)$ ise

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial \bar{z}} - \lambda(z)\frac{\partial \phi_0(z)}{\partial z} = 0 \tag{15}$$

Beltrami denklemini sağlar. Öte yandan biliniyor ki, (15) denkleminin $C^{1,\alpha}(\mathbb{C})$ sınıfından bir bire-bir çözümü mevcuttur (Vekua 1962). (15) denkleminin çözümü olan bu Beltrami homeomorfizmini kullanarak $\phi_0(z) = \rho(z)$ diyelim ve (2) genelleştirilmiş Beltrami sisteminde $z = \rho(z)$ değişken değişimi yapalım

$$w_{\bar{z}} = w_\rho \rho_{\bar{z}} + w_{\bar{\rho}}(\bar{\rho})_{\bar{z}}$$
$$w_z = w_\rho \rho_z + w_{\bar{\rho}}(\bar{\rho})_z$$

olduğundan, bu değişken değişimi ile $Dw=0$ denklemi,

$$\mathrm{Dw}=[(\overline{\rho_z}(Q\bar{\lambda} - I)]\hat{D}w \tag{16}$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\hat{D} := \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}} - \hat{Q}\frac{\partial}{\partial \rho}, \tag{17}$$

$$\hat{Q} = [\bar{\rho}_{\bar{z}}(Q\bar{\lambda} - I)]^{-1} p_z(\lambda I - Q) \tag{18}$$

ve I $m \times m$-tipinde birim matristir. Q nun bir büyüklüğünde karakteristik değerlere sahip olmadığı varsayıldığından $\|Q\bar{\lambda} - I\| \neq 0$ ve dolayısıyla $(Q\bar{\lambda} - I)^{-1}$ tersi mevcuttur. $\lambda I - Q$ matrisinin esas köşegeni sıfır olduğundan, (16) de w_ρ'nin katsayı matrisinin esas köşegeni sıfır olan alt üçgensel matristir. Bu istenilen normal formdur. (17) de w_ρ nin katsayısını Q ile ve bağımsız değişken olarak yeniden z'yi kullanırsak

$$Dw := \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - Q\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{19}$$

denklemini elde ederiz. Dikkat edilirse bu halde Q esas köşegeni sıfır olan kendi değişmeli bir matristir [5].

Cauchy integral temsili (13) kullanılarak Q- holomorf fonksiyonların m tane Q-holomorf fonksiyonların terimlerinde faydalı bir temsili elde edilebilir. Normal formda (17) genelleştirilmiş Beltrami operatörü $\phi(\tau) = \tau I + N(\tau)$ şeklinde kendi ve Q ile değişmeli bir doğurucu çözüme sahiptir. $\Delta(\tau, \tau_0) = N(\tau) - N(\tau_0)$ gösterimi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
[\phi(\tau)-\phi(z)]^{-1}d\phi(\tau) &= \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k}{\tau-z}\left(\frac{\Delta(\tau,z)}{\tau-z}\right)^k d\phi(\tau)\\
&= \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k}{(\tau-z)^{k+1}}\left(\Delta(\tau,z_0)-\Delta(z,z_0)\right)^k d\phi(\tau)\\
&= \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k}{(\tau-z)^{k+1}}\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^{\ell}\binom{k}{\ell}\Delta^{k-\ell}(\tau,z_0)\Delta^{\ell}(z,z_0)d\phi(\tau)\\
&= \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{\ell=0}^{k}\frac{(-1)^{k+l}}{(\tau-z)^{k+1}}\binom{k}{\ell}\Delta^{k-\ell}(\tau,z_0)\Delta^{\ell}(z,z_0)d\phi(\tau)\\
&= \sum_{\ell=0}^{m-1}\frac{1}{\ell!}\Delta(z,z_0)^{\ell}\sum_{k=\ell}^{m-1}\frac{(-1)^{k+\ell}k!}{(\tau-z)^{k+1}(k-\ell)!}\Delta^{k-\ell}(\tau,z_0)d\phi(\tau)\\
&= \sum_{\ell=0}^{m-1}\frac{1}{\ell!}\Delta(z,z_0)^{\ell}\sum_{s=0}^{m-\ell-1}\frac{(-1)^{s+2\ell}(s+\ell)!}{(\tau-z)^{s+\ell+1}(s)!}\Delta^{s}(\tau,z_0)d\phi(\tau)\\
&= \sum_{\ell=0}^{m-1}\frac{1}{\ell!}\Delta(z,z_0)^{\ell}\frac{\partial^{\ell}}{\partial z^{\ell}}\left\{\sum_{s=0}^{m-\ell-1}\frac{(-1)^{s}}{(\tau-z)^{s+1}}\Delta^{s}(\tau,z_0)\right\}d\phi(\tau)
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $f\in C^{m-1}(\Omega)$ için

$$C[z_0]f(z):=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j!}\Delta^{j}(z,z_0)\frac{\partial^{j}}{\partial z^{j}}f(z) \tag{20}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burada f, $m\times s$-tipinde kompleks matris değerli bir fonksiyondur. Şimdi D ve $\dot{D}$ türev operatörlerini

$$D:=\frac{\partial}{\partial\bar{z}}-Q\frac{\partial}{\partial z} \tag{21}$$

$$\dot{D}=\alpha(z)\frac{\partial}{\partial\bar{z}}+\beta(z)\frac{\partial}{\partial z} \tag{22}$$

olarak tanımlayalım. Burada

$$\alpha(z)=\left[\bar{\phi}_z\,\phi_{\bar{z}}-\bar{\phi}_{\bar{z}}\,\phi_z\right]^{-1}\bar{\phi}_z$$
$$\beta(z)=\left[\bar{\phi}_z\,\phi_{\bar{z}}-\bar{\phi}_{\bar{z}}\,\phi_z\right]^{-1}\bar{\phi}_{\bar{z}}$$

Dikkat edilirse

$$\begin{aligned}\dot{D}\phi &= \left[\bar{\phi}_z\,\phi_{\bar{z}}-\bar{\phi}_{\bar{z}}\,\phi_z\right]^{-1}\left[\bar{\phi}_z\,\phi_{\bar{z}}-\bar{\phi}_{\bar{z}}\,\phi_z\right]\\ &= I\end{aligned}$$

olur.

Teorem 3.1 Eğer f $m\times s$-tipinde $C^{m}(\Omega)$ sınıfından bir matris ise,

1. $DC[z_0]f = C[z_0]\left(\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)$

2. $\dot{D}C[z_0]f = C[z_0]f_z$

gerçeklenir.
İspat : 1.

$$
\begin{aligned}
DC[z_0]f &= D\left[\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j!}\Delta(z,z_0)^j\frac{\partial^j f}{\partial z^j}\right]\\
&=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j!}\left[\left(D\Delta(z,z_0)^j\right)\frac{\partial^j f}{\partial z^j}+\Delta(z,z_0)^j D\left(\frac{\partial^j f}{\partial z^j}\right)\right]\\
&=\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{j!}\left[j\Delta(z,z_0)^{j-1}\Delta_{\bar z}-Qj\Delta(z,z_0)^{j-1}\Delta_z\right]\frac{\partial^j f}{\partial z^j}+\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j!}\Delta(z,z_0)^j\left[\frac{\partial^{j+1} f}{\partial z^j\partial\bar z}-Q\frac{\partial^{j+1} f}{\partial z^{j+1}}\right]\\
&=\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{(j-1)!}\Delta(z,z_0)^{j-1}\left[\Delta_{\bar z}-Q\Delta_z\right]\frac{\partial^j f}{\partial z^j}+\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j!}\Delta(z,z_0)^j\left[\frac{\partial^{j+1} f}{\partial z^j\partial\bar z}-Q\frac{\partial^{j+1} f}{\partial z^{j+1}}\right]\\
&=\sum_{j=0}^{m-2}\frac{1}{j!}\Delta(z,z_0)^j Q\frac{\partial^{j+1} f}{\partial z^{j+1}}+\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j!}\Delta(z,z_0)^j\frac{\partial^j f_{\bar z}}{\partial z^j}-\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j!}\Delta(z,z_0)^j Q\frac{\partial^{j+1} f}{\partial z^{j+1}}\\
&=-\frac{1}{(m-1)!}\Delta(z,z_0)^{m-1}Q\frac{\partial^m f}{\partial z^m}+C[z_0]f_{\bar z}\\
&=C[z_0]f_{\bar z}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada Δ ve Q m. mertebeden nilpotent olduklarından $\Delta(z,z_0)^{m-1}Q = 0$ dır.

$$
\begin{aligned}
2.\ \dot{D}C[z_0]f &= \sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j!}\dot{D}\left[\Delta(z,z_0)^j\frac{\partial^j f}{\partial z^j}\right]\\
&=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j!}\left(\dot{D}\Delta(z,z_0)^j\right)\frac{\partial^j f}{\partial z^j}+\sum_{J=0}^{m-1}\frac{1}{j!}\Delta(z,z_0)^j\dot{D}\left(\frac{\partial^j f}{\partial z^j}\right)\\
&=\sum_{J=1}^{m-1}\frac{1}{(j-1)!}\Delta(z,z_0)^{j-1}(1-\beta)\frac{\partial^j f}{\partial z^j}\\
&\quad+\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j!}\Delta(z,z_0)^j\left[\alpha\frac{\partial^{j+1} f}{\partial z^j\partial\bar z}+\beta\frac{\partial^{j+1} f}{\partial z^{j+1}}\right]\\
&=\frac{1}{(m-1)!}\Delta(z,z_0)^{m-1}(\beta-1)\frac{\partial^m f}{\partial z^m}+\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j!}\Delta(z,z_0)^j\frac{\partial^{j+1} f}{\partial z^{j+1}}\\
&=C[z_0]f_z
\end{aligned}
$$

dır.

Sonuç 3.2 f analitik ise $C[z_0]f$, (8) denkleminin bir çözümüdür.

Kaynaklar

1. Kühn E. 1974. Über die Funktionentheorie einer Klasse Elliptischer Differentialgleichungsysteme in der Ebene, Phd. Dissertation, Universitaet Dourtmund.

2. Douglish A. 1953. A Function Theoretic Approach to Elliptic systems of Equations in two variables. Comm. Pure Appl. Math. 6: 259-289.

3. Bojarski B. V. 1966. Theory of generalized analytic vectors. (in Russian) Ann. Polon. Math. 17: 281 – 320.

4. Hile G. N. 1982. Function theory for generalized Beltrami systems, Comp. Math. 11: 101- 125.

5. Hızlıyel S., Çağlıyan M. 2004. Generalized Q -holomorphic functions. Complex Var. Theory Appl. 49 : 427 – 447.